

Introducción al análisis convexo y los fundamentos de la programación matemática

René Meziat

texto guía: curso análisis convexo
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

Bogotá, 2004 - 2005

Índice general

Parte I

**Fundamentos de Análisis
Convexo**

Capítulo 1

Geometría Afín

FALTA

Capítulo 2

Conjuntos convexos

FALTA

Capítulo 3

Combinaciones convexas y clausuras convexas

FALTA

Capítulo 4

Combinaciones positivas y conos convexos

FALTA

Capítulo 5

Topología y convexidad

FALTA

Capítulo 6

Teoremas de separación

FALTA

Capítulo 7

Polaridad, dualidad y sus aplicaciones

FALTA

Capítulo 8

Direcciones y conos de recesión

FALTA

Capítulo 9

Vértices y caras de conjuntos convexos

FALTA

Capítulo 10

Estructura de los conjuntos convexos

FALTA

Parte II

Programación Lineal

Capítulo 11

Poliedros

Sea a^1, \dots, a^m un conjunto finito de vectores en un espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Llamaremos I al conjunto de superíndices:

$$I = \{1, \dots, m\}. \quad (11.1)$$

Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen con una colección finita de desigualdades lineales expresadas en la forma

$$a^i \cdot x \leq b_i, \quad (11.2)$$

donde $a^i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ para cada $i \in I$, donde I es un conjunto finito de índices como (??). En forma breve podemos representar el poliedro P como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq b_i; \forall i \in I\}. \quad (11.3)$$

Para comodidad en la notación y una representación más clara de muchas situaciones podemos expresar a P como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, \quad (11.4)$$

donde A es la matriz de dimensión $m \times n$ cuyas filas están formadas por los vectores a^1, \dots, a^m del espacio \mathbb{R}^n ; el vector $b \in \mathbb{R}^m$ está formado por los valores b_1, \dots, b_m dispuestos en forma de columna ordenada. La comparación $c \leq b$ entre vectores c y b de \mathbb{R}^m tiene lugar componente a componente:

$$c_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (11.5)$$

El lector debe comprobar que cualquier poliedro P es un conjunto convexo y cerrado en \mathbb{R}^n

11.1. Dimensión de un poliedro

Dado un poliedro P en \mathbb{R}^n descrito como aparece en (??), definimos un conjunto de índices $I_0 \subseteq I$ como:

$$I_0 = \{i \in I \mid a^i \cdot x = b_i \forall x \in P\}, \quad (11.6)$$

lo que significa que I_0 está compuesto por los índices en I que representan desigualdades lineales, tomadas de la definición (??) de P , que se cumplen realmente como igualdades en todo punto de P . Restringiéndonos al subconjunto de índices en I_0 , podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$a^i \cdot x = b_i \quad \text{con } i \in I_0, \quad (11.7)$$

cuyo rango, supondremos, es r . Con este mismo conjunto de ecuaciones podemos definir el conjunto afín:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i \forall i \in I_0\}, \quad (11.8)$$

el cual, consecuentemente, tiene dimensión $n - r$. Ahora mostraremos que la dimensión del poliedro P coincide con la dimensión de la variedad afín M :

$$\dim P = n - r = \dim M. \quad (11.9)$$

En primer lugar $P \subseteq M$, atendiendo a la definición de M y del conjunto de índices I_0 . Mostraremos que $M \subseteq \text{aff}(P)$ lo cual permitirá concluir que las dimensiones de P y M coinciden. Cuando $I \equiv I_0$ tenemos, a partir de las definiciones, que $P \equiv M$. Si $I_0 \subsetneq I$ definimos $I_1 = I / I_0$ y supondremos que q es el número de elementos en I_1 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que I_1 está compuesto por los primeros q índices de I , estos son $1, \dots, q$. Por definición del conjunto de índices I_0 , para cada índice $i \in I_1$ existe un vector $x^i \in P$ tal que $a^i \cdot x^i < b_i$ donde hacemos notar la desigualdad estricta. Si definimos

$$x^* = \frac{1}{q} (x^1 + \dots + x^q), \quad (11.10)$$

encontramos que $x^* \in P$ porque P es convexo y además $a^i \cdot x^* < b_i \forall i = 1, \dots, q$, porque cada miembro de la colección $\{x^1, \dots, x^q\}$ satisface la desigualdad débil $a^i \cdot x^j \leq b_i \forall j = 1, \dots, q$, donde i está fijo en I_1 y satisface $a^i \cdot x^i < b_i$. Puesto que $P \subseteq M$ concluimos que $x^* \in M$ y satisface $a^i \cdot x^* < b_i$ cuando $i \in I_1$. Con esta observación auxiliar mostraremos que $M \subseteq \text{aff}(P)$. Dado $x \in M$ arbitrario

Figura 11.1: $y = x^* + \lambda(x - x^*)$

definimos

$$y = x^* + \lambda(x - x^*), \quad (11.11)$$

y encontramos que para aquellos índices $i \in I_0$ tenemos

$$\begin{aligned} a^i \cdot y &= a^i \cdot x^* + \lambda a^i \cdot (x - x^*) \\ &= a^i \cdot x^* + \lambda(b_i - b_i) \\ &= b_i \end{aligned}$$

porque x y x^* están en M y tomamos $i \in I_0$. Por otra parte, cuando $i \in I_1$ tenemos

$$a^i \cdot y = a^i \cdot x^* + \lambda a^i \cdot (x - x^*),$$

pero hemos visto que $a^i \cdot x^* < b_i$ cuando $i \in I_1$, por lo tanto podemos elegir $\lambda > 0$ y suficientemente pequeño para que $a^i \cdot y \leq b_i \forall i \in I_1$, así el vector $y \in P$.

Puesto que $y = x^* + \lambda(x - x^*)$ con $\lambda > 0$, $y \in P$, $x^* \in P$, concluimos que $x \in \text{aff}(P)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}y - \frac{1-\lambda}{\lambda}x^* &= x \\ \frac{1}{\lambda}y + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x^* &= x. \end{aligned}$$

Como $x \in M$ es arbitrario, concluimos que $M \subseteq \text{aff}(P)$ y por lo tanto $M = \text{aff}(P)$, así que P y M comparten la misma dimensión.

Vemos así que un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene dimensión n si y sólo si existe un punto $x \in P$ tal que $a^i \cdot x < b_i \forall i \in I$ donde P admite la definición (??).

11.2. Las caras de un poliedro

Cuando P es el poliedro descrito en (??) sus caras son precisamente aquellos conjuntos de la forma

$$F = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}, \quad (11.12)$$

donde J es un conjunto de índices que satisface:

$$I_0 \subseteq J \subseteq I. \quad (11.13)$$

Primero veremos que cada conjunto de la forma (??) es una cara del poliedro P . Supongamos que $x, y \in P$ y que un punto interior al segmento $[x, y]$ intersecta con F , donde F es un conjunto que admite la definición (??). Por lo tanto existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in F, \quad (11.14)$$

luego

$$a^i \cdot z = \lambda a^i \cdot x + (1 - \lambda)a^i \cdot y = b_i \forall i \in J.$$

Como $J \subseteq I$, tenemos $a^i \cdot x \leq b_i$; $a^i \cdot y \leq b_i$, $\forall i \in J$, pero si $a^i \cdot x < b_i$ ó $a^i \cdot y < b_i$ para algún $i \in J$, entonces no puede suceder que $a^i \cdot z = b_i$, por lo tanto debemos concluir que $a^i \cdot x = b_i$; $a^i \cdot y = b_i$, $\forall i \in J$, con lo cual $x, y \in F$. Hemos demostrado así que F es cara del poliedro P .

Mostraremos ahora que cada cara de P tiene la forma dada en (??). Supongamos que $F \subseteq P$ es una cara del poliedro P . Si elegimos a en el interior relativo de F , tenemos que F es la menor cara del poliedro P que contiene al punto a . Mostraremos que F admite la forma dada en (??), para ello definimos el conjunto de índices J como:

$$J = \{i \in I \mid a^i \cdot a = b_i\} \quad (11.15)$$

y vemos claramente que $I_0 \subseteq J$ además que

$$F' = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}, \quad (11.16)$$

es una cara de P que contiene al punto a .

Hemos utilizado la conclusión anterior según la cual cada conjunto de la forma (??) es una cara del poliedro P . Por esto afirmamos que F' es una cara de P que contiene al punto a , luego $F = F_a \subseteq F'$. Mostraremos que $F' \subseteq F_a$ lo que nos permitirá concluir que $F' = F$ y que cada cara de P admite la definición (??). Es importante hacer notar que la definición del conjunto de índices J nos permite afirmar que $a^i \cdot a < b_i$ cuando $i \notin J$. Ahora supondremos que $x \in F'$ y

Figura 11.2: $y = a + \lambda(a - x)$

definiremos el vector y como

$$y = a + \lambda(a - x), \quad (11.17)$$

de manera que si elegimos $\lambda > 0$ encontramos que el punto a está en el interior relativo del segmento $[x, y]$. Por otra parte si el índice $i \in J$ tenemos $a^i \cdot a = b_i$; $a^i \cdot x = b_i$ por definición de J y F' . Por lo tanto

$$\begin{aligned} a^i \cdot y &= a^i \cdot a + \lambda a^i \cdot (a - x) \\ &= b_i + \lambda(b_i - b_i) \\ &= b_i \end{aligned}$$

cuando $i \in J$.

En el caso en que $i \notin J$ tenemos que $a^i \cdot a < b_i$ y eligiendo $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tenemos que se cumple

$$a^i \cdot y = a^i \cdot a + \lambda a^i \cdot (a - x) \leq b_i \quad \forall i \in I/J.$$

Esto muestra finalmente que existe $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que $y \in P$, por lo tanto el segmento $[x, y] \subseteq P$ y su interior intersecta con la cara F en el punto a . Puesto que F es cara, encontramos que $[x, y] \subseteq F$ así que en particular $x \in F$. Como $x \in F'$ fue elegido arbitrariamente, tenemos $F' \subseteq F \equiv F_a$. Finalmente $F = F'$ lo que muestra que cada cara del poliedro P puede expresarse en la forma (??).

Una conclusión importante que podemos obtener a partir de la caracterización (??) para las caras de un poliedro P , es que el conjunto de todas las caras de P es finito debido a que tan solo hay finitas maneras de elegir el conjunto de índices J .

Dentro de la caracterización de las caras de un poliedro P que acabamos de representar está implícita la dimensión de cada cara de P . Cuando F es una cara de P y a es un punto en el interior relativo de F , tenemos que

$$F = F_a = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}, \quad (11.18)$$

donde el conjunto de índices J está definido como

$$J = \{i \in I \mid a^i \cdot a = b_i\}, \quad (11.19)$$

entonces la dimensión de F es $n - \rho$ donde ρ es el rango del sistema de ecuaciones lineales $a^i \cdot x = b_i \quad \forall i \in J$. Para darse cuenta de esto basta con ver que la variedad afín:

$$M_J = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}, \quad (11.20)$$

tiene dimensión $n - \rho$ y coincide con $\text{aff}(F)$. Fácilmente vemos que $F \subseteq M_J$, para mostrar que $M_J \subseteq \text{aff}(F)$ tomamos $x \in M_J$ arbitrario y construimos el vector

$$y = a + \lambda(x - a), \quad (11.21)$$

que cumple con $a^i \cdot y = b_i \quad \forall i \in J$ y satisface $a^i \cdot y \leq b_i$ tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeño en (??) porque $a^i \cdot a < b_i$ cuando $i \notin J$ por definición del conjunto de índices J en (??).

Vemos que la caracterización de las caras de un poliedro P dada en (??) no sólo nos da una descripción general de las caras de un poliedro, sino que además nos brinda información acerca de su dimensión. Esto será de gran utilidad en la siguiente sección.

11.3. Vértices y aristas de poliedros

A los puntos extremos de un poliedro P los llamaremos *vértices* y a las caras de dimensión uno del poliedro P las llamaremos *aristas*. Debe ser claro que un

punto $x \in P$, donde P es el poliedro descrito en (??), es un vértice de P si y sólo si existen a^{i_1}, \dots, a^{i_n} vectores linealmente independientes tales que

$$a^{i_j} \cdot x = b_{i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (11.22)$$

donde los índices i_1, \dots, i_n están tomados del conjunto de índices I que define a P en (??). Esto es equivalente a decir que los vectores a^{i_1}, \dots, a^{i_n} se tomaron entre la colección de desigualdades lineales que definen al polinomio P en (??) o entre las filas de la matriz A en (??).

Para justificar esta representación de los vértices de P basta con observar que cuando x es un vértice $F = \{x\}$ es una cara de dimensión nula de P , luego admite la definición (??) siendo J un conjunto de índices tal que $I_0 \subseteq J \subseteq I$ donde el sistema de ecuaciones lineales $a^i \cdot x = b_i$ con $i \in J$ tiene rango n . Entonces podemos encontrar n índices $i_1, \dots, i_n \in J$ tales que los vectores a^{i_1}, \dots, a^{i_n} son linealmente independientes y evidentemente cumplen (??). Recíprocamente, si $x \in P$ y existen índices $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que x cumple (??) y a^{i_1}, \dots, a^{i_n} son linealmente independientes, entonces tomamos $J = \{i_1, \dots, i_n\}$ y encontramos que

$$F = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}$$

contiene tan sólo al punto x porque el sistema lineal (??) admite una única solución.

De forma análoga podemos definir una arista Γ de un poliedro P como un conjunto de puntos de P que satisfacen, en forma de igualdad, un mismo conjunto de (al menos) $n - 1$ desigualdades lineales linealmente independientes tomadas del conjunto de desigualdades lineales que definen al poliedro P . Para comprobar esto supondremos que Γ es una arista del poliedro P , lo que significa que Γ es una cara de P con dimensión 1, así que puede expresarse como:

$$\Gamma = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\} \quad (11.23)$$

donde J es un conjunto de índices $I_0 \subseteq J \subseteq I$ con la propiedad que el sistema de ecuaciones lineales $a^i \cdot x = b_i$ con $i \in J$ tiene dimensión $n - 1$, así que podemos encontrar $a^{i_1}, \dots, a^{i_{n-1}}$ linealmente independientes tales que $a^{i_j} \cdot x = b_{i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n - 1, \forall x \in \Gamma$. Recíprocamente si encontramos $a^{i_1}, \dots, a^{i_{n-1}}$ linealmente independientes tales que $a^i \cdot x = b_i \quad \forall j = 1, \dots, n - 1, \forall x \in \Gamma$, tomamos $J = \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$ y definimos:

$$F = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}$$

encontramos que F es una cara del poliedro P con dimensión 1 que contiene a Γ . Como $\Gamma \subseteq F$ y la dimensión de F es igual a la dimensión de Γ , entonces la inclusión no puede ser propia, con lo cual $\Gamma = F$. Esto comprueba que toda arista de P , es un conjunto de puntos de P que satisface un mismo conjunto de $n - 1$ desigualdades lineales linealmente independientes, en forma de igualdad, tomadas de la colección de desigualdades lineales que definen a P .

Diremos que un vértice x de P es no degenerado cuando el punto x satisface exactamente n desigualdades linealmente independientes, en forma de igualdad,

tomadas entre la colección de desigualdades lineales que definen a P . Es decir que existen exactamente n vectores a^{i_1}, \dots, a^{i_n} linealmente independientes, con $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $a^{i_j} \cdot x = b_{i_j} \forall j = 1, \dots, n$. Veremos que si P es un poliedro en \mathbb{R}^n con dimensión n y x es un vértice no degenerado de P , entonces existen exactamente n aristas de P que convergen en el punto x y podemos caracterizarlas explícitamente. Puesto que x es un vértice no degenerado del poliedro P , existen exactamente n vectores linealmente independientes a^{i_1}, \dots, a^{i_n} con $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $a^{i_j} \cdot x = b_{i_j} \forall j = 1, \dots, n$. Vamos a definir el vector $y^k \in \mathbb{R}^n$ como la única solución del sistema lineal $a^{i_k} \cdot y = -1, a^{i_j} \cdot y = 0 \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{k\}$ donde $k \text{ in } \{1, \dots, n\}$ está fijo. Veremos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\Gamma_k = \{x + \lambda y^k \mid \lambda \in [0, \epsilon]\}$$

es una arista de P , la cual evidentemente converge al punto x . Si suponemos que el poliedro P admite la representación (??), tomaremos $J = \{i_1, \dots, i_n\} / \{i_k\}$ dejando k fijo en $\{1, \dots, n\}$. Al definir $F = \{x \in P \mid a^i \cdot x = b_i; \forall i \in J\}$ encontramos $\Gamma_k \subseteq F$ porque cuando $i \notin J, a^i \cdot x < b_i$ porque x es vértice no degenerado, luego solo satisface como igualdad las desigualdades $\{i_1, \dots, i_n\}$ y en el caso en que $i = i_k$ entonces:

$$\begin{aligned} a^{i_k} \cdot (x + \lambda y^k) &= a^{i_k} \cdot x + \lambda a^{i_k} \cdot y^k \\ &= a^{i_k} \cdot x - \lambda \\ &< b_i, \end{aligned}$$

de manera que eligiendo $\epsilon > 0$ apropiadamente, encontramos que $a^{i_k} \cdot (x + \lambda y^k) \leq b_i \forall \lambda \in [0, \epsilon]$ así que $\Gamma_k \subseteq P$ y en particular $\Gamma_k \subseteq F$. Por construcción $\dim F = 1$ y asimismo $\dim \Gamma_k = 1$, siendo F una cara del poliedro P , por lo tanto si a es un punto interior de Γ_k , también será un punto interior de F y así F será la menor cara de P que contiene al punto a . Esto demuestra que para cada y^k el segmento dirigido

$$\Gamma_k = \{x + \lambda y^k : \lambda \in [0, \epsilon]\} \quad (11.24)$$

define de manera natural una arista del poliedro P que converge al punto x .

Puesto que tenemos n posibilidades distintas de elegir k en $\{1, \dots, n\}$ que producen n vectores diferentes y^1, \dots, y^n , hemos conseguido mostrar explícitamente n aristas diferentes del poliedro P que convergen al punto x . Mostraremos que estas son las únicas n aristas de P con esta propiedad. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $y \neq 0$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\Gamma = \{x + \lambda y \mid \lambda \in [0, \epsilon]\} \quad (11.25)$$

está contenido en una arista de P que converge al punto x . Puesto que $a^{i_j} \cdot x = b_{i_j} \forall j = 1, \dots, n$ siendo a^{i_1}, \dots, a^{i_n} linealmente independientes y puesto que x hace parte de la arista de los demás puntos $x + \lambda y$ con $\lambda > 0$ también están en la arista y deben satisfacer en forma de igualdad, las mismas $n - 1$ desigualdades linealmente independientes tomadas entre el conjunto de desigualdades descritas

por los índices i_1, \dots, i_n . Por lo tanto existe un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que:

$$\begin{aligned} a^{i_j} \cdot (x + \lambda y) &= b_{i_j} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{k\} \\ a^{i_k} \cdot (x + \lambda y) &< b_{i_k} \end{aligned}$$

pero

$$a^{i_j} \cdot x = b_{i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

tenemos que

$$\begin{aligned} a^{i_j} \cdot y &= 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{k\} \\ a^{i_k} \cdot y &< 0 \end{aligned}$$

por lo tanto existe un múltiplo positivo de y que satisface el sistema de ecuaciones lineales $a^{i_k} \cdot y = -1$, $a^{i_j} \cdot y = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{k\}$ cuya solución única es y^k . Concluimos que la dirección $y \neq 0$ de la arista Γ en (??) que converge a x sólo puede ser una de las direcciones y^1, \dots, y^n definidas previamente.

Por lo tanto podemos expresar a P como

$$P = \text{Co}\{y^1, \dots, y^k\} \quad (11.26)$$

donde y^1, \dots, y^k son los puntos extremos de P . La dimensión de P coincide con la magnitud de la mayor subcolección de $\{y^1, \dots, y^k\}$ afín independiente menos uno. Entonces $k - 1 \geq r$, luego $k \geq r + 1$ donde k es el número de vértices del politopo P .

Problema: 11.3.1. Demuestre que un politopo con dimensión r debe tener al menos $r + 1$ vértices.

Solución: 11.3.1. Sea P un politopo de dimensión r , puesto que P es un poliedro acotado, P es convexo y compacto por lo tanto se puede expresar como la envoltura convexa de sus puntos extremos: $P = \text{Co}(\text{ext}(P))$, como P es un poliedro, P tiene finitas caras, en particular debe tener finitos puntos extremos.

Problema: 11.3.2. Encuentre el cono de recesión de un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ donde A es una matriz de m filas por n columnas y $b \in \mathbb{R}^m$.

Solución: 11.3.2. $\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Supongamos que $y \neq 0$ es una dirección de recesión para P , entonces $x + \lambda y \in P \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall x \in P$. Puesto que $x, x + \lambda y \in P$ tenemos:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ A(x + \lambda y) &= Ax + \lambda Ay \leq b \end{aligned}$$

$\forall \lambda > 0$. Si alguna componente de Ay fuera positiva, no podría ser cierto que $Ax + \lambda Ay \leq b$ para cualquier $\lambda > 0$, entonces $Ay \leq 0$ cuando $y \in \text{rec}(P)$.

Recíprocamente, suponemos que $Ay \leq 0$ con $y \in \mathbb{R}^n$, si $x \in P$, tenemos que $Ax \leq b$ luego $Ax + \lambda Ay \leq b$ cuando $\lambda > 0$ es arbitrario, concluimos que

$$A(x + \lambda y) \leq b$$

luego $x + \lambda y \in P$ siempre que $x \in p$ y $\lambda > 0$, luego y es una dirección de recesión de P . Concluimos que $\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$.

Problema: 11.3.3. Muestre que el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ tiene al menos un vértice si y sólo si $\text{rango}A = n$.

Solución: 11.3.3. Sabemos que P es convexo y cerrado puesto que se trata de un poliedro. También sabemos que un conjunto convexo posee vértices si y sólo si su espacio de linealidades es trivial. Una dirección $y \neq 0$ en \mathbb{R}^n es una linealidad cuando $\pm y$ son direcciones de recesión del conjunto convexo en cuestión. En nuestro caso y es dirección de recesión del poliedro P si y sólo si $Ay \leq 0$ por lo tanto y es una linealidad de P si y sólo si $Ay = 0$, así que P carece de linealidades si y sólo si $\text{rango}A = n$. Puesto que P es convexo y cerrado. P posee puntos extremos si y sólo si $\text{rango}A = n$.

Problema: 11.3.4. Muestre que un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ es un politopo si y sólo si $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\} = \{0\}$.

Solución: 11.3.4. Vemos que $\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$, entonces P es acotado si y sólo si su cono de recesión es trivial, debido a que P es convexo y cerrado. Recordemos que un conjunto es convexo y cerrado es acotado si y sólo si su cono de recesión es $\{0\}$.

11.4. Polares de poliedros

Cuando presentamos los primeros resultados sobre polaridad vimos que dados un conjunto finito de vectores a^1, \dots, a^m en \mathbb{R}^n el cono poliédrico:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\} \end{aligned} \quad (11.27)$$

(donde A es la matriz cuyas filas son los vectores a^1, \dots, a^m en \mathbb{R}^n) tiene por polar al cono:

$$\begin{aligned} W &= \{A^t y : y \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^m\} \\ &= \{y_1 a^1 + \dots + y_m a^m : y_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m\} \\ &= \text{cono } \{a^1, \dots, a^m\}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Recordamos que V y W con conos convexos cerrados, que contienen al origen, inmersos en \mathbb{R}^n tales que:

$$\begin{aligned} V^0 &\equiv W \\ W^0 &\equiv V. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Figura 11.3: $\bar{x} \in P$ y $c \geq 0$.

Esta pareja de resultados en polaridad fue de gran importancia para obtener resultados fundamentales en optimización como el Lema de Farkas y los teoremas del Alternativo en sus diferentes formas. Hacemos notar en la primera de las relaciones (??) que el polar de un cono poliédrico V es el cono generado (también llamado clausura positiva) por las filas de la matriz A en la definición de V . En resumen $V^0 = \text{cono}\{\text{filas de } A\}$ cuando $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. El objetivo de esta sección es presentar un resultado de dualidad análogo a (??) cuando tratamos con poliedros más generales, no solamente con conos poliédricos como V .

Supongamos que P es un poliedro no vacío descrito en la forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

si tomamos $\bar{x} \in P$ fijo tenemos $A\bar{x} \leq b$ definimos $c = b - A\bar{x}$ y encontramos que $A(x - \bar{x}) = Ax - A\bar{x} \leq b - A\bar{x} = c$ siempre que $x \in P$. Observamos también que $c = b - A\bar{x} \geq 0$ por que $\bar{x} \in P$.

Así encontramos que $Ay \leq c$ si y sólo si $y \in P - \bar{x}$ donde $\bar{x} \in P$. Esto muestra que salvo una traslación del origen hasta un punto de P siempre podemos representar el poliedro como una colección de desigualdades lineales en las que los términos constantes a la derecha no son negativos:

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay \leq c\} = P - \bar{x}$$

donde $\bar{x} \in P$ y $c \geq 0$.

Es importante resaltar, como una conclusión de este análisis, que cualquier poliedro P que contiene el origen admite esta descripción

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

$0 \leq b$ si y sólo si $0 \in P$.

Podemos suponer que $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ donde $b \geq 0$. P admite la representación

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq b_i; \forall i \in I\}.$$

y distinguiremos las desigualdades que definen a P entre homogéneas

$$a^i \cdot x \leq b_i = 0 \quad \text{con } i \in I$$

y las no homogéneas:

$$a^i \cdot x \leq b_i \quad \text{con } b_i > 0 \quad e \ i \in I$$

Cuando tratamos con una desigualdad no homogénea

$$a^i \cdot x \leq b_i \quad \text{con } b_i > 0 \quad e \ i \in I$$

podemos dividir por el valor positivo b_i para encontrar

$$\frac{a^i \cdot x}{b_i} \leq 1 \quad (11.30)$$

de manera que podemos alterar los coeficientes de la desigualdad lineal para encontrar la desigualdad equivalente

$$\alpha^i \cdot x \leq 1 \quad (11.31)$$

donde $\alpha^i \in \mathbb{R}^n$ está definido como: $\alpha^i = \frac{a^i}{b_i}$. Es importante resaltar que las desigualdades (??) y (??) son perfectamente equivalentes.

De esta manera vemos que todo poliedro P , cuando contiene el origen, admite la descripción

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 1 \forall i = 1, \dots, k \\ a^j \cdot x \leq 0 \forall j = k+1, \dots, l\}. \quad (11.32)$$

Por conveniencia tomaremos el conjunto de índices $I = \{1, \dots, k\}$ y el conjunto de índices $J = \{k+1, \dots, l\}$ para expresar a P en forma concisa como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 1; a^j \cdot x \leq 0 \forall i \in I \forall j \in J\}.$$

Evidentemente P es un conjunto convexo, cerrado de \mathbb{R}^n que contiene al origen. Ahora definiremos el conjunto Q como:

$$Q = \text{co} \{a^1, \dots, a^k; 0\} + \text{cono} \{a^{k+1}, \dots, a^l\} \quad (11.33)$$

donde hacemos notar que Q es la suma de la envoltura convexa del cero junto a los vectores $\{a^i \mid i \in I\}$ que representan las desigualdades lineales no homogéneas en la definición del poliedro P , mas la clausura positiva de los vectores $\{a^j \mid j \in J\}$ que representan las desigualdades lineales homogéneas en la definición de P .

Puesto que la colección $\{a^1, \dots, a^k; 0\}$ es finita, ella es compacta, entonces su envoltura convexa también es compacta, luego es cerrada y acotada, además de ser evidentemente convexa. Así podemos concluir que el conjunto Q es convexo, por ser la suma de dos convexos, es cerrado por ser la suma de un conjunto compacto con un cerrado. Recordamos que la clausura positiva:

$$\text{cono} \{a^{k+1}, \dots, a^l\} = \{y_1 a^{k+1} + \dots + y_{l-k} a^l : y_1, \dots, y_{l-k} \geq 0\}$$

es un cono convexo cerrado con el origen.

Así que Q es un conjunto convexo, cerrado que contiene al origen. Q contiene al origen porque ambos sumandos en la definición de Q contienen al origen. Puesto que P y Q son conjuntos convexos, cerrados que contienen al origen, ambos deben coincidir con su respectivo doble polar:

$$\begin{aligned} P^{00} &= P \\ Q^{00} &= Q. \end{aligned} \quad (11.34)$$

El resultado de dualidad que nos interesa en esta sección afirma que el polar de P es Q y viceversa:

$$\begin{aligned} P^0 &= Q \\ Q^0 &= P. \end{aligned}$$

Debido a (??) bastará mostrar $P = Q^0$. Supongamos que $x \in P$, $y \in Q$, por la definición de Q existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$; $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_l \geq 0$ donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i &= 1 \\ y &= \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i + \sum_{j=k+1}^l \gamma_j a^j \end{aligned}$$

entonces

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x \cdot a^i) + \sum_{j=k+1}^l \gamma_j (x \cdot a^j)$$

pero como $x \in P$ tenemos:

$$\begin{aligned} a^i \cdot x &\leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ a^j \cdot x &\leq 0 \quad \forall j = k+1, \dots, l \end{aligned}$$

entonces $x \cdot y \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq 1$, lo que demuestra que $P \subseteq Q^0$.

Recíprocamente, si $y \in Q^0$ entonces $a^i \cdot y \leq 1$ cuando $i = 1, \dots, k$ porque $a^1, \dots, a^k \in Q$ trivialmente. Si tomamos a^j con $j \in J = \{k+1, \dots, l\}$ y $\lambda > 0$ arbitrario, encontramos que $a^j \cdot y \leq 1/\lambda$ porque $\lambda a^j \in Q$. Puesto que $\lambda > 0$ es arbitrario, encontramos: $a^j \cdot y \leq 0$ cuando $j = k+1, \dots, l$, así que $y \in P$ atendiendo a la definición (??) del poliedro P .

Encontramos una descripción general para el polar de poliedros: cuando $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ contiene al origen, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b \in \mathbb{R}^m$ está formado por ceros y unos así que P admite la representación:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 1; a^j \cdot x \leq 0 \forall i \in I, j \in J\}.$$

donde I es el conjunto de índices que representan desigualdades lineales no homogéneas en la definición de P y J es el conjunto de índices que representan desigualdades lineales homogéneas en la definición de P . Cuando

$$Q = \text{co} \{0; a^i : i \in I\} + \text{cono} \{a^j : j \in J\}$$

encontramos: $P^0 = Q$, $Q^0 = P$.

Debemos resaltar la importancia de este nuevo resultado de dualidad porque en el estamos relacionando dos lenguajes básicos del análisis convexo sin conexión aparente hasta ahora. En la descripción de un poliedro P , que resulta ser convexo, empleamos el lenguaje y las posibilidades que nos brinda la representación de conjuntos en forma de desigualdades lineales o sobre posiciones finitas de estas. En la descripción del conjunto Q empleamos el lenguaje y la representación de conjuntos convexos como clausuras convexas, clausuras positivas y combinación entre ellas. Aunque hemos presentado y discutido estas formas de representación de conjuntos convexos no las habíamos relacionado entre si, salvo por el primer resultado de dualidad en el que establecimos que el polar de un cono poliédrico $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ es el cono generado por las filas de A :

$$W = \{A^t y \mid y \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^m\} = V^0.$$

De donde concluimos también que $W^0 = V$. Veremos a continuación, como uno de los resultados principales en análisis convexo que no solamente el polar de un poliedro P admite una representación en la forma como se describe a Q , esto es como una envoltura convexa de finitos puntos mas una clausura positiva de finitos vectores, sino que cualquier poliedro admite tal representación.

Además y con igual trascendencia veremos que todo conjunto de esta forma debe ser necesariamente un poliedro.

11.5. Caracterización de poliedros

En primer lugar veremos que cualquier poliedro P puede describirse como

$$P = \text{co}U + \text{cono}V \tag{11.35}$$

donde U, V son conjuntos finitos. Puesto que P es convexo y cerrado, P admite la representación: $P = L + A$ donde L es el espacio de linealidades de P y $A = P \cap L^\perp$ siendo L^\perp el complemento ortogonal de L . Fácilmente vemos que A es un poliedro que carece de linealidades no triviales, como A es cerrado y convexo sin linealidades podemos expresar al conjunto A como:

$$A = \text{co}(\text{ext}(A)) + \text{cono}(\text{dirx}(A)) \tag{11.36}$$

donde $U = \text{ext}(A)$ es el conjunto de los puntos extremos de A y $V_0 = \text{dirx}(A)$ es el conjunto de las direcciones extremas de A . Puesto que A es un poliedro U y V_0 deben ser finitos. De esta manera tenemos

$$P = L + \text{co}U + \text{cono}V_0.$$

Si tomamos una base β del espacio L tenemos que $L = \text{cono}(\beta \cup -\beta)$ así que $P = \text{co}U + \text{cono}V$ donde $V = V_0 \cup \beta \cup -\beta$ es un conjunto finito. Concluimos así que cualquier poliedro admite la representación (??).

Veremos ahora que un conjunto de la forma

$$Q = \text{co}U + \text{cono}V \quad (11.37)$$

es necesariamente un poliedro si U y V son conjuntos compuestos por finitos vectores. Como un resultado preliminar supongamos que $V = \{a^1, \dots, a^m\}$ donde $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$, mostraremos que el cono convexo cerrado Q que corresponde a la clausura positiva de los elementos en V :

$$\begin{aligned} Q &= \text{cono}\{a^1, \dots, a^m\} = \text{cono}V \\ &= \{y_1 a^1 + \dots + y_m a^m : y_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m\} \\ &= \{A^t y \mid y \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^m\} \end{aligned}$$

(siendo A la matriz cuyas filas son los vectores a^1, \dots, a^m) es justamente un cono poliédrico definido por un conjunto de desigualdades lineales homogéneas.

Utilizando los resultados de la sección anterior encontramos que

$$Q^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 0 \forall i = 1, \dots, m\} \quad (11.38)$$

de manera que el polar de Q es un cono poliédrico. Al principio de esta sección señalamos que cada poliedro admite una representación como (??), entonces puesto que Q^0 es un poliedro deben existir conjuntos finitos:

$$\begin{aligned} U &= \{a^i : i = 1, \dots, k\} \\ V &= \{a^j : j = k + 1, \dots, l\} \end{aligned} \quad (11.39)$$

tales que $Q^0 = \text{co}U + \text{cono}V$.

Puesto que Q es un cono convexo y cerrado que contiene al origen, encontramos:

$$\begin{aligned} Q &= Q^{00} = (\text{co}U + \text{cono}V)^0 \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 1; a^j \cdot x \leq 0 \text{ si } i \in I; j \in J\} \end{aligned}$$

donde $I = \{1, \dots, k\}$ y $J = \{k + 1, \dots, l\}$. Aquí hemos utilizado los resultados de dualidad de la sección anterior. Por último veremos que $I = \emptyset$ porque Q es un cono convexo. Dado $x \in Q$ y $\lambda > 0$; $\lambda x \in Q$, porque Q es un cono entonces: si $i \in I$ tenemos $a^i \cdot (\lambda x) \leq 1$ luego $a^i \cdot x \leq 1/\lambda$ así que $a^i \cdot x \leq 0$. Por lo tanto $a^i \cdot x \leq 0 \forall i \in I, \forall x \in Q$, luego $I \subseteq J$ o simplemente $I = \emptyset$.

De esta manera concluimos que Q se puede expresar como el cono poliédrico:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq 0 \forall i = k + 1, \dots, l\}.$$

En resumen, toda clausura positiva finita $Q = \text{cono}\{a^1, \dots, a^m\} = \text{cono}V$ se puede expresar como un cono poliédrico: $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Finalmente veremos que cuando U y V son conjuntos finitos como aparecen en (??), entonces el conjunto

$$Q = \text{co}U + \text{cono}V$$

es un poliedro. Es decir, podemos expresar a Q como el conjunto de puntos en \mathbb{R}^n que satisfacen una colección finita de desigualdades lineales. Como una

ayuda técnica introduciremos el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definido de la siguiente manera:

$$S = \text{cono} \{(a^i; 1), (a^j; 0) : i \in I; j \in J\}$$

y notamos que $x \in Q$ si y sólo si $(x; 1) \in S$. Cuando $x \in Q$ tenemos:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i + \sum_{j=k+1}^l \gamma_j a^j$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k; \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_l \geq 0$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ entonces

$$(x; 1) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a^i; 1) + \sum_{j=k+1}^l \gamma_j (a^j; 0)$$

está en S porque es una combinación positiva de elementos en $\{(a^i; 1) : i \in I\}$ y elementos en $\{(a^j; 0) : j \in J\}$. Recíprocamente si $(x; 1) \in S$, entonces

$$(x; 1) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a^i; 1) + \sum_{j=k+1}^l \gamma_j (a^j; 0) \quad (11.40)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k; \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_l \geq 0$ igualando la última componente en (??) encontramos $1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ por lo tanto x se puede expresar como:

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a^i + \sum_{j=k+1}^l \gamma_j a^j$$

igualando las primeras n componentes en (??). Entonces $x \in Q = \text{co}U + \text{cono}V$.

Ya hemos visto que un cono convexo definido como la clausura positiva de un conjunto finito de vectores puede expresarse como un cono poliédrico:

$$S = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid A_0 y \leq 0\}$$

donde A_0 es una matriz con m filas y $n+1$ columnas. Cada vector $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ lo expresamos como $y = (x; t)$ separando explícitamente su última componente t . Así que $x \in \mathbb{R}^n$. También podemos expresar la matriz A_0 como $A_0 = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ donde b es su última columna, entonces A tiene m filas y n columnas. Por lo tanto

$$A_0 y = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = Ax + tb$$

así que:

$$S = \{(x; t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid Ax \leq tb\}$$

puesto que $x \in Q$ si y sólo si $(x; 1) \in S$ encontramos que $x \in Q$ si y sólo si $Ax \leq -b$, luego:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq -b\},$$

y así conseguimos demostrar que Q es un poliedro porque admite una representación dada a través de un conjunto finito de desigualdades lineales.

Problema: 11.5.1. *Muestre que si A es un conjunto convexo y cerrado con un número finito de caras entonces A debe ser un poliedro.*

Solución: 11.5.1. *Puesto que A es convexo y cerrado podemos expresar al conjunto A como:*

$$A = L + C$$

donde L es el espacio de linealidades de A y C es un conjunto convexo, cerrado sin linealidades. No es difícil mostrar que cuando F es cara de C , entonces $L + F$ es cara de A : sean $x, y \in A$ tales que $]x, y[$ interseca con $L + F$, entonces $x = x^1 + x^2$; $y = y^1 + y^2$; $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in L + F$ donde $\lambda \in (0, 1)$, $x^1, y^1 \in L$; $x^2, y^2 \in C$.

$$z = z^1 + z^2$$

con

$$z^1 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)y^1 \in L$$

$$z^2 = \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \in F$$

porque la representación $z^1 + z^2 = z$ con $z^1 \in L$, $z^2 \in C$ es única debido a que $C = A \cap L^\perp$. Como F es cara de C tenemos que $x^2, y^2 \in F$, luego $x = x^1 + x^2$, $y = y^1 + y^2 \in L + F$.

Puesto que $L + F$ es cara de A cuando F es cara de C , entonces C debe tener finitas caras. Si comprobamos el resultado bajo el supuesto de que C es convexo, cerrado con finitas caras y sin linealidades no triviales, entonces C debe ser un poliedro, así que $C = \text{co}U + \text{cono}V_0$, donde U, V_0 son finitos.

Tomando $V = \beta \cup -\beta \cup V_0$ donde β es la base de L , encontramos que

$$A = \text{co}U + \text{cono}V$$

donde U, V son finitos, así que A debe ser un poliedro. Debemos comprobar el resultado para C , puesto que C es convexo y cerrado y no posee linealidades no triviales, podemos expresar a C como:

$$C = \text{co}(\text{ext}(C)) + \text{cono}(\text{dirx}(C))$$

donde $\text{ext}(C)$ es la colección de puntos extremos de C y $\text{dirx}(C)$ es la colección de direcciones extremas de C . Puesto que C tiene un número finito de caras, $\text{ext}(C)$ debe ser un conjunto finito y $\text{dirx}(C)$ debe ser también finito.

Capítulo 12

Programación lineal

Veremos aquí la utilidad de los elementos de análisis convexo que hemos estudiado para comprender mejor una familia particular de programas matemáticos denominados programas lineales. Un programa matemático es un problema de optimización que pretende encontrar el mejor valor (máximo o mínimo) de una función $f(x)$ definida en un conjunto Ω incluido en un espacio euclidiano \mathbb{R}^n . En forma breve un programa matemático se representa como

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \quad (12.1)$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Eventualmente \min puede ser sustituido por \max . Las componentes del vector x se denominan variables de diseño, la función f se denomina función objetivo y el conjunto Ω se denomina conjunto factible.

Cuando $\Omega = \emptyset$ decimos que el problema es *infactible*, cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$ estamos tratando un problema sin restricciones. Las características y propiedades de la función f y el conjunto Ω definen familias muy importantes de programas matemáticos que requieren métodos y técnicas particulares de análisis para su estudio, solución y comprensión. Por ejemplo si f es una función convexa y Ω es un conjunto convexo estamos tratando con *programas convexos*.

En este capítulo concentraremos nuestra atención en *programas lineales*, estos son aquellos programas matemáticos en los cuales f es una función lineal y Ω está descrito por una familia de desigualdades lineales:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \cdot x \leq b_i \text{ con } i \in I\}$$

donde $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n \forall i \in I = \{1, \dots, m\}$. Evidentemente Ω es un poliedro. Brevemente, un programa lineal es un programa matemático en el cual la función objetivo es una función lineal y su conjunto factible es un poliedro. Cuando nos encontramos con un problema matemático como (??) la primera pregunta que nos hacemos es si es factible o infactible porque cabe la posibilidad que $\Omega = \emptyset$ porque no haya ningún *punto factible* que cumple todas las condiciones en la definición de Ω . Si $\Omega \neq \emptyset$ decimos que el programa es factible y a todos los puntos en Ω los llamamos soluciones factibles. Después de verificar que el

programa matemático (??) es factible comprobamos si está acotado inferiormente, es decir si el conjunto $\{f(x) : x \in \Omega\}$ tiene una cota inferior, si esto no ocurre el problema tiene poco sentido porque podemos hacer el valor de $f(x)$ arbitrariamente grande con signo negativo. Es común encontrar programas lineales no acotados. Cuando un programa matemático en la forma (??) está acotado inferiormente, no es completamente seguro que tenga una solución o *minimizador*, esto es un punto $x^* \in \Omega$ tal que $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in \Omega$. Por ejemplo si $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ con $\Omega = \mathbb{R}^n$ el programa está acotado inferiormente pero carece de minimizadores. Se requieren condiciones adicionales para justificar que un programa matemático como (??), acotado inferiormente, tiene una solución, por ejemplo cuando Ω es compacto y f es continua, el programa tiene solución, sin embargo estas condiciones son demasiado restrictivas. Veremos más adelante que un programa lineal, cuando está acotado siempre tiene solución. Los puntos factibles de un programa lineal se denominan soluciones factibles y las soluciones de un programa lineal se denominan soluciones óptimas.

En primer lugar consideremos la acotación y existencia de soluciones de programas lineales. Dado un programa lineal en la forma general

$$\min_{x \in P} c \cdot x \quad (12.2)$$

donde $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro, $c \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, será muy útil emplear la caracterización de poliedros que nos proporciona el análisis convexo. Puesto que P es convexo y cerrado lo podemos expresar como:

$$P = L + Q$$

donde L es el espacio de linealidades de P y $Q = P \cap L^\perp$, así que Q es un poliedro cuyo espacio de linealidades es trivial. Es fácil ver que si L no es trivial entonces el programa lineal (??) no está acotado cuando $c \notin L^\perp$. Basta ver que puesto que $c \notin L^\perp$, existe $y \neq 0$ en L tal que $c \cdot y \neq 0$; tomando $z \in Q$ encontramos que: $x = \gamma y + z \in P$ donde $c \cdot x = \gamma(c \cdot y) + c \cdot z$ y γ es un escalar arbitrario, así que $c \cdot x$ puede hacerse tan pequeño (hacia $-\infty$) como se quiera. Cuando $c \in L^\perp$ los valores $c \cdot x$ en P están definidos por los valores de $c \cdot x$ en Q :

$$c \cdot x = c \cdot (y + z) = c \cdot y + c \cdot z = c \cdot z$$

cuando $x \in P$ con $x = y + z$, $y \in L$, $z \in Q$.

Vemos de esta manera que si L es trivial ó $c \in L^\perp$ el problema está completamente definido por el poliedro Q , por lo tanto podemos suponer que el poliedro P carece de linealidades, puesto que P es un conjunto cerrado y convexo admite la descripción $P = \text{co}(\text{ext}(P)) + \text{cono}(\text{dirx}(P))$ donde $\text{ext}(P)$ representa el conjunto de puntos extremos de P y $\text{dirx}(P)$ representa el conjunto de direcciones extremas de P . Puesto que P es un poliedro $\text{ext}(P)$ y $\text{dirx}(P)$ son conjuntos finitos.

Proposición: 12.0.1. *Cuando P es un poliedro no vacío que carece de linealidades, si $\{y^1, \dots, y^k\}$ es la colección de sus direcciones extremas, el programa*

lineal (??) está acotado inferiormente si y solo si $c \cdot y^i \geq 0 \forall i = 1, \dots, k$.

Proposición: 12.0.2. Cuando P es un poliedro no vacío sin linealidades, tal que el programa lineal (??) está acotado inferiormente, entonces al menos uno de los puntos extremos de P es solución factible óptima del programa lineal (??).

Proposición: 12.0.3. Cuando P es un poliedro no vacío, sin linealidades, tal que el programa lineal (??) está acotado inferiormente, entonces el conjunto de soluciones factibles óptimas del programa lineal (??) está formado por la envoltura convexa de los puntos extremos de P que son soluciones factibles óptimas de (??) y cualquier traslación de los puntos en dicha envoltura por un vector que se pueda expresar como combinación positiva de las direcciones extremas de P que son perpendiculares (ortogonales) con c .

Corolario: 12.0.1. Sea P un poliedro no vacío que no contiene linealidades, cuyas direcciones extremas las indicaremos como $\{y^1, \dots, y^k\}$ si las tiene. Supondremos que el programa lineal (??) está acotado inferiormente y que ninguna de las direcciones extremas de P es perpendicular (ortogonal) a c . Observe que estas dos suposiciones se resumen afirmando que $c \cdot y^i > 0 \forall i = 1, \dots, k$. En estas condiciones el conjunto solución del programa lineal (??) es la envoltura convexa de los puntos extremos de P que son soluciones factibles óptimas del programa lineal (??). Como ya vimos, en estas condiciones siempre hay un punto extremos de P al menos, que es solución factible óptima del programa lineal (??). Concluimos que, bajo las suposiciones hechas, el conjunto solución del programa lineal (??) es un simplex (politopo), luego es cerrado, convexo y acotado.

Corolario: 12.0.2. Sea P un politopo. El conjunto solución del programa lineal (??) es el politopo que corresponde a la envoltura convexa de los puntos extremos de P que son soluciones factibles óptimas del programa lineal (??). Por lo que hemos expuesto antes, siempre existe un punto extremo de P que es solución factible óptima del programa lineal (??).

Demostración: La demostración de los resultados enunciados es consecuencia inmediata de la estructura general de los poliedros que presentamos en el capítulo anterior. Sean x^1, \dots, x^l los puntos extremos de un poliedro P que carece de linealidades y sean y^1, \dots, y^k sus direcciones extremas, puesto que P admite la representación

$$P = \text{co} \{x^1, \dots, x^l\} + \text{cono} \{y^1, \dots, y^k\}$$

entonces cada punto de P se puede representar como

$$x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^k \gamma_j y^j \quad (12.3)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \gamma_1, \dots, \gamma_k \geq 0$ con: $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$, recíprocamente cada expresión como (??) representa un punto de P . Si eventualmente $c \cdot y^j < 0$ para alguna dirección extrema y^j de P , es fácil darse cuenta que (??) no está acotado interiormente, basta tomar un punto x de P y observar que $z = x + \lambda y^j \in P$ con $\lambda > 0$ arbitrario, por lo tanto z es una solución factible para cada $\lambda > 0$, pero el valor de la función objetivo en z es: $c \cdot z = c \cdot x + \lambda c \cdot y^j$ y como $c \cdot y^j < 0$, $c \cdot z$ se puede hacer arbitrariamente grande con signo negativo, eligiendo $\lambda > 0$ adecuadamente. Por lo tanto, una condición necesaria para que el programa lineal (??) esté acotado interiormente es que $c \cdot y^j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k$ donde y^1, \dots, y^k son las direcciones extremas de P . Veremos ahora que también es una condición suficiente. Si suponemos que $c \cdot y^j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k$, entonces dado $x \in P$, expresado en la forma (??), tenemos

$$c \cdot x = \sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i + \sum_{j=1}^k \gamma_j c \cdot y^j \geq \sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i \quad (12.4)$$

porque $\gamma_1, \dots, \gamma_k \geq 0$ en (??). Si mostramos que la expresión en (??) a la derecha está acotada interiormente, entonces también será este el caso para el programa lineal (??). Notamos que la expresión a la derecha de (??) es la función objetivo lineal del programa lineal (??) evaluada en un punto genérico de la envoltura convexa del conjunto $\{x^1, \dots, x^l\}$ formado por los puntos extremos de P . Pero sabemos que las funciones lineales son continuas y que $\text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$ es compacta, así que la función continua $c \cdot x$ debe alcanzar un mínimo entre sus puntos. Con esto hemos mostrado que el programa lineal (??) está acotado interiormente si y solo si $c \cdot y^j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k$. Como acabamos de ver, la función lineal $x \rightarrow c \cdot x$ toma un mínimo en $\text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$, veremos que tal valor mínimo se puede conseguir en alguno de los puntos extremos de P . Supongamos que $x \in \text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$ entonces x se puede expresar como:

$$x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x^i \quad (12.5)$$

donde $\lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, l$ con $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$. Recíprocamente cualquier punto con la forma (??) es un punto de $\text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$. El valor de la función objetivo en x es:

$$c \cdot x = \sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i \quad (12.6)$$

y vemos que la expresión a la derecha en (??) es la combinación convexa de una colección finita de números reales, así que:

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i \geq \min_{1 \leq i \leq l} c \cdot x^i$$

cuando $\lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = 1$. Claramente existe al menos un $j \in \{1, \dots, l\}$ tal que: $\min_{1 \leq i \leq l} c \cdot x^i = c \cdot x^j$ luego $\sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i \geq c \cdot x^j$

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = 1$. Por lo tanto $c \cdot x \geq c \cdot x^j \forall x \in \text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$, pero evidentemente $x^j \in \text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$, luego x^j es un punto extremo de P donde la función objetivo lineal $c \cdot x$ alcanza un mínimo, no solo sobre el conjunto $\text{co}\{x^1, \dots, x^l\}$ sino sobre todo el poliedro P , dado que

$$P = \text{co}\{x^1, \dots, x^l\} + \text{cono}\{y^1, \dots, y^k\}$$

entonces

$$\begin{aligned} c \cdot x &= \sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i + \sum_{j=1}^k \gamma_j c \cdot y^j \\ &\geq \sum_{i=1}^l \lambda_i c \cdot x^i \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq l} c \cdot x^i = c \cdot x^j \end{aligned} \quad (12.7)$$

donde hemos utilizado la suposición de que $c \cdot y^j \geq 0 \forall j = 1, \dots, k$ debido a que el programa lineal (??) está acotado inferiormente. Estudiando con detalle las desigualdades en (??) vemos que si la función lineal $c \cdot x$ alcanza un mínimo en P , esto solo puede ocurrir en aquellos puntos x^i en P que se puedan expresar como combinación convexa de los puntos extremos de P que son soluciones factibles óptimas para (??); o en aquellos puntos de esta misma combinación convexa trasladados por una combinación positiva de direcciones extremas de P ortogonales con c . Así, cuando $c \cdot x = \min_{1 \leq i \leq l} c \cdot x^i$ en la expresión

$$x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^k \gamma_j y^j \quad (12.8)$$

tan solo pueden ser positivos los coeficientes λ_i correspondientes a puntos extremos x^i de P tales que

$$c \cdot x^i = \min_{1 \leq i \leq l} c \cdot x^i$$

que son justamente aquellos puntos extremos de P , soluciones factibles óptimas del programa (??). De la misma manera, en la expresión (??) tan solo pueden ser positivos los coeficientes γ_j correspondientes a direcciones extremas de P ortogonales con c , es decir aquellas y^j tales que $c \cdot y^j = 0$, en caso contrario $c \cdot y^j > 0$ y podemos elegir $\gamma_j = 0$ lo cual mejora el valor de la función objetivo en x . Así que en (??) tan solo pueden aparecer explícitamente direcciones extremas ortogonales a c y puntos extremos de P que también sean soluciones factibles óptimas del programa lineal (??).

12.1. Caracterización de soluciones factibles óptimas

Consideremos un programa lineal en la forma general:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & a^i \cdot x = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & a^j \cdot x \geq b_j \quad j = m+1, \dots, k \end{aligned} \quad (12.9)$$

donde $c, x \in \mathbb{R}^n$, los vectores $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$ y los escalares $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ indicados por el índice i representan las restricciones en forma de igualdad y los vectores $a^{m+1}, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$ junto con los escalares $b_{m+1}, \dots, b_k \in \mathbb{R}$, representan las restricciones en forma de desigualdad indexadas por el índice j .

Cuando x es un punto factible del programa lineal (??), él cumple con todas las restricciones en forma de igualdad en (??) y entre las restricciones en forma de desigualdad en (??) puede cumplir algunas en forma de igualdad y otras en forma de desigualdad estricta. Dado un índice $j \in \{m+1, \dots, k\}$ evidentemente $a^j \cdot x \geq b_j$ si ocurre que $a^j \cdot x = b_j$ decimos que la restricción (dada como desigualdad) j está *saturada* en el punto factible x . Podemos definir el conjunto $I(x)$ como el conjunto de índices en $\{m+1, \dots, k\}$ que corresponden a aquellas restricciones de desigualdad del programa (??) saturadas en el punto x :

$$I(x) = \{j \in \{m+1, \dots, k\} : a^j \cdot x = b_j\}.$$

Esta familia de restricciones donde x está saturada es importante para determinar si un punto factible x es solución factible óptima del programa lineal (??). Veremos que un punto factible \bar{x} de (??) es solución factible óptima del programa lineal (??) si y solo si podemos expresar a c como:

$$c = \sum_{i=1}^m \gamma_i a^i + \sum_{j=m+1}^k \lambda_j a^j$$

donde $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$; $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k \geq 0$ con: $\lambda_j = 0$ cuando $a^j \cdot \bar{x} > b_j$, lo cual es equivalente a decir que podemos expresar a c como:

$$c = \sum_{i=1}^m \gamma_i a^i + \sum_{j \in I(\bar{x})} \lambda_j a^j$$

siendo $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$; $\lambda_j \geq 0 \forall j \in I(\bar{x})$. Para justificar esta caracterización de las soluciones factibles óptimas de un programa lineal como (??) emplearemos un colorario del Lema de Farkas:

1. Dados $c; a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$
 $a^i \cdot y \geq 0 \forall i = 1, \dots, m$
 implica $c \cdot y \geq 0$ si y solo si

$$c = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_m a^m$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$.

2. Dados $c; a^1, \dots, a^m; a^{m+1}, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$.

$$a^i \cdot y = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$a^j \cdot y \geq 0 \quad \forall j = m+1, \dots, k$$

implica $c \cdot y \geq 0$ si y solo si

$$c = \gamma_1 a^1 + \dots + \gamma_m a^m + \lambda_{m+1} a^{m+1} + \dots + \lambda_k a^k$$

con $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}; \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k \geq 0$

El lector debería que ?? es el planteamiento básico del Lema de Farkas y debería probar fácilmente ?? y ?? con las herramientas de análisis convexo que hemos estudiado hasta ahora. La caracterización de las soluciones factibles óptimas que hemos presentado sigue fácilmente de la afirmación dada en ??.

Supongamos que \bar{x} es una solución factible óptima del programa lineal (??) y supongamos que y es un vector tal que

$$\begin{aligned} a^i \cdot y &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ a^j \cdot y &\geq 0 \quad \text{cuando } j \in I(\bar{x}) \end{aligned}$$

entonces es fácil ver que hay un $\rho > 0$ suficientemente pequeño tal que $\bar{x} + \rho y$ es un punto factible. Considere que: $a^i \cdot (\bar{x} + \rho y) = a^i \cdot \bar{x} + \rho a^i \cdot y = b_i$ cuando $i = 1, \dots, m$; además $a^j \cdot (\bar{x} + \rho y) = a^j \cdot \bar{x} + \rho a^j \cdot y \geq b_j$ cuando $j \in I(\bar{x})$ y $a^j \cdot \bar{x} > b_j$ si $j \notin I(\bar{x})$ entonces podemos elegir $\rho > 0$ tal que

$$a^j \cdot (\bar{x} + \rho y) = a^j \cdot \bar{x} + \rho a^j \cdot y \geq b_j$$

tomando ρ suficientemente pequeño. Puesto que \bar{x} es solución factible óptima, tenemos:

$$c \cdot \bar{x} \leq c \cdot (\bar{x} + \rho y) = c \cdot \bar{x} + \rho c \cdot y$$

por lo tanto $0 \leq c \cdot y$. Esto muestra que $c \cdot y \geq 0$ con $j \in I(\bar{x})$, aplicando el lema de Farkas en su forma ?? encontramos que:

$$c = \sum_{i=1}^m \gamma_i a^i + \sum_{j \in I(\bar{x})} \lambda_j a^j$$

donde $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}; \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in I(\bar{x})$. Recíprocamente, supongamos que c puede expresarse como

$$c = \sum_{i=1}^m \gamma_i a^i + \sum_{j \in I(\bar{x})} \lambda_j a^j$$

donde $\lambda_j \geq 0$ y \bar{x} es un punto factible de (?). Veremos que \bar{x} es solución factible óptima de (?). Tomamos $y = x - \bar{x}$, con x una solución factible, así encontramos que $a^i \cdot y = a^i \cdot x - a^i \cdot \bar{x} = b_i - b_i = 0$ para $i = 1, \dots, m$, además $a^j \cdot y = a^j \cdot x - a^j \cdot \bar{x} = a^j \cdot x - b_j \geq 0$ cuando $j \in I(\bar{x})$, entonces $c \cdot y = c \cdot (x - \bar{x}) \geq 0$ luego $c \cdot x \geq c \cdot \bar{x}$ cuando x es una solución factible arbitraria de (?). Por lo tanto \bar{x} es solución factible óptima.

Capítulo 13

Dualidad en programas lineales

Si consideramos un programa lineal definido como:

$$\begin{array}{ll} \text{mín } c \cdot x & \\ \text{s.a.} & \\ A \cdot x \geq b & \end{array} \quad (13.1)$$

con $x \geq 0$ en \mathbb{R}^n , donde A es una matriz de dimensiones $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ podemos plantear de forma natural un nuevo programa lineal como:

$$\begin{array}{ll} \text{máx } b \cdot y & \\ \text{s.a.} & \\ A^t \cdot y \leq c & \end{array} \quad (13.2)$$

con $y \geq 0$ en \mathbb{R}^m .

Observe que las manipulaciones que hemos hecho en el problema (??) para obtener (??) son bastante naturales:

- Cambiar un proceso de minimización por uno de maximización.
- Cambiar la matriz A por su traspuesta.
- Tomamos desigualdades lineales con el sentido opuesto.
- Planteamos un nuevo programa lineal con variables de diseño $y \in \mathbb{R}_+^m$.

Observe que muy fácilmente el programa (??) lo podemos expresar en forma de un programa de minimización con restricciones que utilicen desigualdades de tipo \geq :

$$\begin{array}{ll} \text{mín } -b \cdot y & \\ \text{s.a.} & \\ -A^t \cdot y \geq -c & \end{array} \quad (13.3)$$

con $y \geq 0$ en \mathbb{R}^m . Donde (??) es exactamente el mismo problema que (??). Si aplicamos los mismos pasos que empleamos para obtener (??) a partir de (??) sobre el programa lineal (??) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \text{máx } -c \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & -A \cdot x \leq -b \end{aligned} \tag{13.4}$$

con $x \geq 0$ en \mathbb{R}^n , y este es exactamente el mismo problema que planteamos en (??).

Por esta razón llamamos a los programas lineales (??) y (??) programas duales, porque cada uno se obtiene del otro siguiendo la lista de procedimientos enunciada, la cual resulta finalmente ser reversible (ver figura ??).

Figura 13.1: Operaciones de dualidad en programas equivalentes. (P) es (??) (D) (??); (P') y (D') sus duales.

Con mayor precisión llamaremos al programa (??) programa *primal* y al programa (??) programa *dual* y debe quedar claro de esta presentación que (??) es el programa *dual* de (??) y viceversa.

Emprendremos ahora un estudio más detallado de la relación entre programas duales. Trataremos de buscar relaciones más profundas entre una pareja de programas duales más allá de la simetría en su presentación. Cuando $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución factible del programa primal (??) e $y \in \mathbb{R}^m$ es una solución factible del programa dual (??) decimos que (x, y) es una pareja de soluciones factibles. Es muy importante resaltar que no siempre se puede contar con una pareja de soluciones factibles dada cualquier pareja de problemas duales. Profundizaremos en esto más adelante.

Cuando (x, y) es una pareja de soluciones factibles para los problemas duales (??) y (??) vemos fácilmente que: $b \cdot y \leq c \cdot x$ lo que nos indica que $c \cdot x$ es una cota superior para el problema dual (??) y $b \cdot y$ es una cota inferior para el problema primal (??), de donde se concluye que ambos problemas tienen soluciones factibles óptimas debido a que ambos son programas lineales (todo programa lineal acotado tiene minimizadores).

Dada una pareja de soluciones factibles (\bar{x}, \bar{y}) para los problemas duales (??) y (??) tal que

$$b \cdot \bar{y} = c \cdot \bar{x} \tag{13.5}$$

concluimos fácilmente que (\bar{x}, \bar{y}) debe ser una pareja de soluciones factibles óptimas (explíquelo).

No es tan evidente, pero vemos que es cierto, que (??) es también una condición necesaria para que (\bar{x}, \bar{y}) sea una pareja de soluciones factibles óptimas de los problemas duales (??) y (??). Es natural preguntarse las relaciones entre la factibilidad y la optimalidad de los problemas duales (??) y (??). El siguiente resultado aclara estas preguntas naturales.

Teorema 13.0.1 (TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL). *Dada una pareja de programas lineales duales como se enuncian es (??) y (??), una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

1. *Ambos problemas son factibles, una pareja de soluciones factibles (\bar{x}, \bar{y}) está formada por soluciones factibles óptimas si y sólo si $b \cdot \bar{y} = c \cdot \bar{x}$.*
2. *Alguno de los problemas (??) ó (??) es infactible. Cuando uno de ellos resulta factible, entonces debe ser no acotado.*

Para mostrar este resultado recordaremos un resultado auxiliar que vimos como consecuencia de los teoremas del Alternativo:

Lema. *Si $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es antisimétrica, existe un $x \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\mathcal{K}x \geq 0$ y $\mathcal{K}x + x > 0$.*

El lector puede dar la prueba de este resultado a partir de los teoremas básicos del Alternativo propios del estudio del análisis convexo.

Aplicaremos este resultado sobre la matriz antisimétrica $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ definida como:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^t & 0 & c \\ b^t & -c^t & 0 \end{pmatrix}$$

así que debe haber un vector $(y; x; t)$ en \mathbb{R}_+^{m+n+1} tal que

$$\mathcal{K} \begin{pmatrix} y \\ x \\ t \end{pmatrix} \geq 0 \quad \mathcal{K} \begin{pmatrix} y \\ x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ x \\ t \end{pmatrix} > 0$$

lo cual se traduce en las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} Ax - tb &\geq 0 & Ax - tb + y &> 0 \\ -A^t y + tc &\geq 0 & -A^t y + tc + x &> 0 \\ b \cdot y - c \cdot x &\geq 0 & b \cdot y - c \cdot x + t &> 0. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Analizaremos dos casos alternativos y excluyentes:

i. Cuando $t > 0$

ii. Cuando $t = 0$

Si aceptamos **i.** definimos $\bar{x} = x/t$, $\bar{y} = y/t$ y encontramos: $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}_+^m$ con $A\bar{x} \geq b$; $A^t\bar{y} \leq c$, luego (\bar{x}, \bar{y}) es una pareja de soluciones factibles luego $b \cdot \bar{y} \leq c \cdot \bar{x}$, pero a la vez en (??) vemos $b \cdot \bar{y} \geq c \cdot \bar{x}$ luego (\bar{x}, \bar{y}) es una pareja de soluciones factibles óptimas. Evidentemente, si (\hat{x}, \hat{y}) fuera una pareja de soluciones factibles óptimas deberíamos tener $b \cdot \hat{y} = b \cdot \bar{y} = c \cdot \bar{x} = c \cdot \hat{x}$ de lo contrario no podrían ser óptimas. Esto muestra que cuando $t > 0$ ambos problemas son factibles y existe una pareja de soluciones factibles óptimas para ellos.

En el caso alternativo excluyente $t = 0$ encontramos que las desigualdades en (??) toman la forma:

$$\begin{aligned} Ax &\geq 0 \\ +A^t y &\leq 0 \\ b \cdot y - c \cdot x &\geq 0 \end{aligned} \quad (13.7)$$

con $x \in \mathbb{R}_+^n$, e $y \in \mathbb{R}_+^m$. Veremos que los problemas duales (??) y (??) no pueden ser ambos factibles a la vez: Si (\tilde{x}, \tilde{y}) es una pareja de soluciones factibles entonces $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}_+^m$ con:

$$A\tilde{x} \geq b, \quad A^t\tilde{y} \leq c.$$

Con esto encontramos que:

$$b \cdot y \leq A\tilde{x} \cdot y = \tilde{x} \cdot A^t y \leq 0 \quad (13.8)$$

donde hemos utilizado $A\tilde{x} \geq b$ y $A^t y \leq 0$. De manera semejante encontramos

$$-c \cdot x \leq -A^t\tilde{y} \cdot x = -\tilde{y} \cdot Ax \leq 0 \quad (13.9)$$

donde hemos empleado $A^t\tilde{y} \leq c$ y que $Ax \geq 0$. Uniendo (??) y (??) encontramos que $b \cdot y - c \cdot x \leq 0$ lo cual contradice (??).

De esta manera encontramos que ambos problemas (??) y (??) no pueden ser factibles a la vez cuando $t = 0$. Podríamos pensar que a pesar de ello hubiera tan solo uno factible con una solución factible óptima. Veremos que no cabe esta posibilidad. Supongamos que (??) es factible, entonces existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $A\tilde{x} \geq b$, definimos $\tilde{x} + \lambda x$ con $\lambda > 0$ y encontramos que $\tilde{x} + \lambda x$ es factible: $\tilde{x} + \lambda x \geq 0$ porque $\tilde{x}, x \in \mathbb{R}_+^n$ y $\lambda > 0$. Además $A(\tilde{x} + \lambda x) = A\tilde{x} + \lambda Ax \geq b$ porque $A\tilde{x} \geq b$ y $Ax \geq 0$ con $\lambda > 0$. Por otra parte $c \cdot (\tilde{x} + \lambda x) = c \cdot \tilde{x} + \lambda c \cdot x$. Pero $c \cdot x < b \cdot y \leq A\tilde{x} \cdot y = \tilde{x} \cdot A^t y \leq 0$ donde hemos empleado (??). Así que $c \cdot (\tilde{x} + \lambda x) \rightarrow -\infty$ si $\lambda \rightarrow \infty$ donde $\tilde{x} + \lambda x$ es factible para el programa (??) para cualquier $\lambda > 0$. Esto muestra que si (??) es factible, entonces no está acotado. Un análisis semejante muestra que si (??) fuera factible, entonces no estaría acotado. Nos queda por aclarar si en una pareja de programas duales pueden ambos ser infactibles. La respuesta es afirmativa y se aclara en el siguiente ejemplo:

Si planteamos un programa unidimensional lineal como Si consideramos un programa lineal definido como:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c_1 x_1 \\ & \text{s.a.} \\ & a_{11} x_1 \geq b_1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{13.10}$$

su dual es

$$\begin{aligned} & \text{máx } b_1 y_1 \\ & \text{s.a.} \\ & a_{11} y_1 \leq c_1 \\ & y_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{13.11}$$

tomando $a_{11} = 0$, $c_1 < 0$ y $b_1 > 0$ encontramos que los conjuntos factibles de (??) y (??) son ambos \emptyset .

Recíprocamente si (\bar{x}, \bar{y}) es una pareja de soluciones factibles que cumplen con las relaciones de complementaridad:

$$\bar{x} \cdot (A^t \bar{y} - c) = 0 \tag{13.12}$$

$$\bar{y} \cdot (A \bar{x} - b) = 0 \tag{13.13}$$

$$\tag{13.14}$$

entonces (\bar{x}, \bar{y}) es una pareja de soluciones factibles óptimas. Basta ver que $c \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot A^t \bar{y} = A \bar{x} \cdot \bar{y} = b \cdot \bar{y}$ así que \bar{x} e \bar{y} son óptimas.

13.1. Dualidad generalizada

Supongamos que planteamos un programa lineal que involucra restricciones de igualdad y a la vez restricciones en forma de desigualdades, por ejemplo:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c \cdot x \\ & \text{s.a. } Ax \geq b \\ & A'x = b' \end{aligned} \tag{13.15}$$

con $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A' \in \mathbb{R}^{k \times n}$ con $b \in \mathbb{R}^m$, $b' \in \mathbb{R}^m$. El programa lineal (??) lo podemos expresar en la forma de un programa lineal que involucre solamente restricciones de desigualdad:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ A' \\ \dots \\ -A' \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ \dots \\ b' \\ \dots \\ -b' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, y este lo podemos representar en la forma de un programa lineal que involucre solamente variables positivas, así que:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ A' \\ \dots \\ -A' \end{pmatrix} (x' - x'') \geq \begin{pmatrix} b \\ \dots \\ b' \\ \dots \\ -b' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.16)$$

donde $x = x' - x''$ con $x', x'' \in \mathbb{R}_+^n$ y vemos que (??) se puede llevar a la forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } \begin{pmatrix} c \\ \dots \\ -c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ \dots \\ x'' \end{pmatrix} \\ & \text{s.a.} \\ & \begin{pmatrix} A & -A \\ \dots & \dots \\ A' & -A' \\ \dots & \dots \\ -A' & +A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} b \\ \dots \\ b' \\ \dots \\ -b' \end{pmatrix} \\ & \text{con } \begin{pmatrix} x' \\ \dots \\ x'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{2n} \end{aligned} \quad (13.17)$$

que corresponde a la forma en que hemos presentado el principio de dualidad en programación lineal. Por lo tanto el programa dual correspondiente a (??) es:

$$\begin{aligned} & \text{máx } b \cdot y + b' \cdot y^1 - b' \cdot y^2 \\ & \text{s.a.} \\ & A^t y + A'^t y^1 - A'^t y^2 \leq c \\ & -A^t y - A'^t y^1 + A'^t y^2 \leq -c \\ & \text{con } y \in \mathbb{R}_+^m; y^1, y^2 \in \mathbb{R}_+^k \end{aligned}$$

el cual toma la forma simplificada:

$$\begin{aligned} & \text{máx } b \cdot y + b' \cdot y' \\ & \text{s.a.} \\ & A^t y + A'^t y' = c \\ & \text{donde } y \in \mathbb{R}_+^m, y' \in \mathbb{R}_+^k. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Observe que hemos tomado $y' = y^1 - y^2$ en \mathbb{R}^k . A partir de este ejercicio nos damos cuenta que dado un programa lineal primal como (??), que involucra restricciones de igualdad y restricciones en forma de desigualdad, su correspondiente programa dual (??) consta de m variables duales $y \in \mathbb{R}^m$ sujetas a condiciones de positividad $y \geq 0$ y k variables duales $y' \in \mathbb{R}^k$ libres, es decir que no están obligadas a ser positivas. Es de suma importancia recalcar que

cada restricción en forma de desigualdad \geq da lugar a una variable dual $y_j \geq 0$; asimismo cada restricción de igualdad $=$ da lugar a una variable dual y_j sin restricción de positividad. Es muy importante señalar que todas las restricciones que aparecen en el programa dual (??) están dadas en forma de igualdad:

$$a^i \cdot y + a'^i \cdot y' = c_i$$

para $i = 1, \dots, n$ donde a^1, \dots, a^n son las columnas de la matriz A y a'^1, \dots, a'^n son las columnas de la matriz A' . Esto obedece al hecho que las variables del problema primal no están sujetas a condiciones de positividad: $x \in \mathbb{R}^n$ y cada x_i puede ser positiva o negativa. El lector puede repetir el ejercicio presentado en esta sección para observar que si hubiera un conjunto de índices $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ que representara un conjunto de variables en el problema primal (??) obligadas a ser no negativas:

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J$$

esto ocasionaría, al final del argumento que las restricciones correspondientes a los índices j en J tomaran la forma de desigualdades en el sentido \leq , esto significa que el programa lineal primal general

$$\begin{aligned} & \text{mín } c \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & Ax \geq b \\ & A'x = b' \\ \text{con } & x_j \geq 0 \forall j \in J \\ & y \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{13.19}$$

tiene por dual al programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{máx } b \cdot y + b' \cdot y' \\ & \text{s.a.} \\ & a^j \cdot y + a'^j \cdot y' \leq c_j \quad \forall j \in J \\ & a^j \cdot y + a'^j \cdot y' = c_j \quad \forall j \notin J \\ \text{con } & y \geq 0 \in \mathbb{R}^m, y' \in \mathbb{R}^k. \end{aligned} \tag{13.20}$$

De esta manera encontramos la forma general de plantear programas duales a partir de programas lineales primales dados en la forma general (??); lo cual puede resumirse brevemente:

1. Las restricciones en forma de desigualdad con el sentido \geq en el programa primal, dan lugar a variables duales sometidas a condiciones de positividad.
2. Las restricciones en forma de igualdad en el programa primal, dan lugar a variables duales libres.
3. Las variables primales bajo condiciones de positividad, dan lugar a restricciones en forma de desigualdad con el sentido \leq en el programa dual.
4. Las variables primales libres dan lugar a restricciones en forma de igualdad en el programa dual.

13.1.1. Forma general del teorema de la dualidad

Dada la pareja de programas duales (??) y (??); una y solo una entre las siguientes afirmaciones es cierta:

1. Ambos problemas son factibles y existe una *pareja* de soluciones factibles óptimas: $(\bar{x}; (\bar{y}, \bar{y}'))$ que se caracterizan por

$$b \cdot \bar{y} + b' \cdot \bar{y}' = c \cdot \bar{x}$$

2. Uno de los problemas al menos, no es factible y cuando uno de ellos lo sea, entonces necesariamente no estará acotado.

13.1.2. Forma general de las restricciones de complementaridad

Una pareja de soluciones factibles $(\bar{x}; (\bar{y}, \bar{y}'))$ para los problemas duales (??) y (??) es una pareja de soluciones factibles óptimas si y solo si:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j (a^j \cdot y + a'^j \cdot y' - c_j) &= 0 \quad \forall j \in J \\ y_k (b_k - A\bar{x})_k &= 0 \quad \forall k = 1, \dots, m \\ y_k (b_k - \alpha^k \bar{x})_k &= 0 \quad \forall k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

con α^k la fila k -ésima en la matriz A.

13.1.3. Lema de Farkas no homogéneo

Como una aplicación de los resultados generales de dualidad en programación lineal, presentaremos el siguiente resultado conocido como Lema de Farkas no homogéneo. La prueba empleada ha sido sugerida por el profesor Fernando Palacios:

Cuando $a^0; a^1; \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_0; \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ siendo la familia de restricciones lineales

$$a^i \cdot x \leq \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

factible, entonces existen coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ tales que

$$a^0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i a^i; \quad \gamma_0 \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \gamma_i \quad (13.21)$$

si y solo si $a^i \cdot x \leq \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, m$ implica $a^0 \cdot x \leq \gamma_0$.

Demostración:

Es muy fácil ver que si las expresiones en (??) son ciertas con coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, entonces $a^0 \cdot x \leq \gamma_0$ siempre que $a^i \cdot x \leq \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, m$. Recíprocamente supongamos que $a^i \cdot x \leq \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, m$ implica $a^0 \cdot x \leq \gamma_0$. Puesto que la colección de restricciones lineales $a^i \cdot x \leq \gamma_i$ con $i = 1, \dots, m$

es factible, entonces $a^0 \cdot x \leq \gamma_0$ para un tal $x \in \mathbb{R}^n$ que cumple con ellas. Planteamos el programa lineal:

$$\begin{aligned} & \text{máx } a^0 \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & a^i x \leq \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & \text{con } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{13.22}$$

cuyo dual toma la forma

$$\begin{aligned} & \text{mín } \gamma \cdot y \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{i=1}^m y_i a^i = a^0 \\ & \text{con } y \in \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \tag{13.23}$$

Puesto que el problema primal es factible y acotado: factible porque existe un $x \in \mathbb{R}^n$ que satisface $a^i \cdot x \leq \gamma_i$ para cada x solución factible, entonces debe existir una pareja (\bar{x}, \bar{y}) de soluciones factibles óptimas, por lo tanto existe $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ con $\bar{y} \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^m \bar{y}_i a^i = a^0$ tal que \bar{y} es solución factible óptima de (??) y \bar{x} es solución factible óptima de (??), entonces

$$\gamma \cdot y = a^0 \cdot \bar{x} \leq \gamma_0$$

porque \bar{x} es solución factible de (??) y hemos supuesto que $a^0 \cdot x \leq \gamma_0$ siempre que $a^i \cdot x \leq \gamma_i \quad \forall i = 1, \dots, m$. Así que $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \geq 0$ tales que:

$$\sum_{i=1}^m \bar{y}_i \gamma_i \leq \gamma_0; \quad \sum_{i=1}^m \bar{y}_i a^i = a^0$$

Capítulo 14

Representación estándar de los poliedros

Para establecer métodos prácticos de solución de programas lineales, como el método simplex, por ejemplo, será conveniente tratar con poliedros que admitan la representación general:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b; x \geq 0\} \quad (14.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $b \in \mathbb{R}^m$; con $m = \text{rango}(A)$. Observe que un poliedro en la forma (??) no contiene linealidades dado que hemos impuesto la restricción $x \geq 0$. Es evidente que no todos los poliedros pueden representarse en la forma (??), basta con observar que hay poliedros que sí poseen linealidades. Sin embargo, puesto que el papel de los poliedros y la representación que utilicemos para describirlos, es una cómoda representación de los conjuntos factibles de los programas lineales, lo que vamos a indicar es que introduciendo variables adicionales, denominadas variables de holgura, cualquier conjunto factible correspondiente a un poliedro dado en su forma más general como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / a^i \cdot x \leq b_i \quad \text{con } i \in I\} \quad (14.2)$$

donde $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ con $I = \{1, \dots, m\}$, siempre puede representarse como un nuevo conjunto factible equivalente, que puede involucrar algunas nuevas variables y que admite la descripción general (??). Supongamos que una variable de diseño x_i en el conjunto factible descrito en la forma del poliedro (??), no está bajo una restricción de positividad entonces podemos introducir dos nuevas variables $x'_i, x''_i \geq 0$ donde $x_i = x'_i - x''_i$. De forma similar, si alguna de las restricciones en el conjunto factible (??) está dada en forma de desigualdad: $a^i \cdot x \leq b_i$ introducimos una nueva variable de holgura $x_n \geq 0$ tal que $a^i \cdot x + x_n = b_i$, así obtendremos una restricción en forma de igualdad y un conjunto factible equivalente, mas no igual, al conjunto factible original (??) pero que admite la representación en la forma de un poliedro en la forma estándar: (??). Para garantizar que $m = \text{rango}(A)$ donde m es el número de

filas de la matriz A : basta con que eliminemos las ecuaciones redundantes en el sistema: $Ax = b$.

De esta manera podemos estar confiados que el conjunto factible de cualquier programa lineal puede expresarse en la forma de un conjunto factible equivalente que admite la representación estándar (??). La importancia de la representación estándar (??) radica en que nos permite caracterizar de una manera práctica los puntos extremos y las direcciones extremas del poliedro P , cuando este se puede expresar en dicha forma estándar (??). Como veremos a continuación, podemos describir los puntos extremos de P y sus direcciones extremas en términos de observaciones directas sobre la matriz A que define P en la forma estándar (??).

Capítulo 15

Caracterización de puntos extremos y direcciones extremas

Nos ocuparemos aquí de caracterizar los puntos extremos o vértices de un poliedro dado en la forma estándar:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b; x \geq 0\} \quad (15.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $\text{rango}(A) = m$. Vamos a representar como a^1, a^2, \dots, a^n las columnas de la matriz A que representan vectores en \mathbb{R}^m . Evidentemente $m \leq n$. Observemos que la ecuación matricial $Ax = b$ puede expresarse como:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b$$

donde b aparece como una combinación lineal de las columnas de A tomando las entradas en el vector de variables de diseño $x \in \mathbb{R}^n$ como los respectivos coeficientes. Esta ecuación proporciona una identificación natural de las variables de diseño con las columnas de la matriz A que puede representarse en forma tabular como:

x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
a_{11}	a_{12}	a_{13}	\dots	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	\dots	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	\dots	a_{3n}
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	\dots	a_{mn}

La importancia de resaltar este hecho consiste en que si efectuamos un cambio entre dos columnas de la matriz A , esta operación no altera para nada el sistema siempre que hagamos el mismo intercambio en las variables de diseño

correspondientes. De aquí se desprende que cualquier tipo de reordenamiento entre las columnas de la matriz A , no afecta de ninguna manera el sistema en la medida que hagamos el mismo tipo de reenumeración en sus variables de diseño. En pocas palabras, un reordenamiento en las columnas de la matriz A es equivalente a una nueva enumeración de las variables de diseño en la definición del conjunto factible descrito como el poliedro (??). Esta sencilla observación será de gran utilidad para comprender los procedimientos y argumentos que utilizamos a continuación.

15.0.4. Vértices o puntos extremos

Cada punto extremo x del polinomio P está determinado por una selección de m columnas de la matriz A , linealmente independientes que sin perder generalidad supondremos ocupan las primeras m posiciones: a^1, \dots, a^m y tomamos una matriz invertible $B = [a^1, \dots, a^m]$ de dimensión $m \times m$ tal que $B^{-1}b \geq 0$ y

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que significa que las primeras m posiciones del punto extremo x están determinadas por las correspondientes entradas del vector $B^{-1}b$. Asimismo las entradas restantes del vector x son nulas. En este punto el lector debería notar que la conveniencia en suponer que son exactamente las primeras m columnas de A las que forman un conjunto linealmente independiente radica en que nos permite caracterizar de una forma muy conveniente las entradas de x , como un conjunto de m valores no negativos dado por el vector $B^{-1}b$ y un conjunto de $n - m$ entradas restantes nulas. En pocas palabras, el caso general consiste en seleccionar m posiciones entre las columnas de A , que correspondan a m vectores linealmente independientes que den lugar a una matriz invertible $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que cuando se obtenga el vector de m componentes no negativos $B^{-1}b$, estas se reparten consecuentemente sobre las entradas del vector x según las posiciones de las m columnas linealmente independientes de A que dieron origen a la matriz B . Puesto que siempre podremos reordenar tales columnas y llevarlas a las m primeras posiciones en la lista de las columnas de A y dado que esta operación equivale a una reenumeración de las variables del problema que no influye en su geometría dejaremos aquí esta discusión y supondremos que son justamente las m primeras columnas de A las que forman un conjunto linealmente independiente.

Un punto $x \in P$ es un punto extremo de P si sólo si encontramos que las m primeras columnas de A son linealmente independientes, forman una matriz $B = [a^1, \dots, a^m]$ invertible de dimensión $m \times m$ tal que $B^{-1}b \geq 0$ donde

$$x = \begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix}$$

con $x^b = B^{-1}b$ y $x^N = 0$ siendo x^b el vector en \mathbb{R}^m que representa las m primeras entradas de x y x^N el vector en \mathbb{R}^{n-m} que representa las últimas $n - m$ entradas de x . Esta caracterización no se limita a las m primeras columnas de A

y a las respectivas m primeras posiciones del vector x , se presenta así tan solo por comodidad en la exposición, pero tiene validez en la forma general que es fácil de intuir a partir de esta presentación particular.

Demostración:

Supongamos que x es un punto extremo de P , dado que $x \geq 0$ en \mathbb{R}^n , algunas componentes de x serán positivas y otras nulas. Sin pérdida de generalidad supongamos que las primeras k componentes de x son positivas y las restantes nulas:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k; 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

donde $k \leq n$. Afirmaremos sin demostración que las correspondientes columnas a^1, \dots, a^k de A son linealmente independientes, pero volveremos a justificar esta afirmación más adelante. Puesto que el rango de A es m , tenemos que $k \leq m$, así que podemos completar la colección de columnas a^1, \dots, a^k hasta obtener una colección de m columnas linealmente independientes $a^1, \dots, a^k; a^{k+1}, \dots, a^m$ donde hemos supuesto, nuevamente sin pérdida de generalidad, que estas $m - k$ columnas adicionales ocupan justamente las $m - k$ posiciones a partir de la posición k . Si este no fuera el caso basta reordenar las columnas de A , lo cual es indistinto para la geometría del problema porque representa una nueva enumeración de las variables de diseño. Podemos expresar x como $x = \begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix}$ donde $x^b \in \mathbb{R}^m$ y $x^N \in \mathbb{R}^{n-m}$, puesto que $x \in P$ tenemos que $x^b \geq 0$ y $x^N \geq 0$ y $Ax = b$ pero

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} B \\ N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix} \\ &= Bx^b + Nx^N \\ &= Bx^b \\ &= b \end{aligned}$$

porque $B = [a^1, \dots, a^m]$ representa la matriz de dimensión $m \times m$ que contiene las primeras m columnas de A y $N = [a^{m+1}, \dots, a^n]$ es la matriz de dimensión $m \times (n - m)$ que contiene las restantes $n - m$ columnas de A . Puesto que $x_i = 0$ $\forall i = k, k + 1, \dots, n$ con $k \leq m$, entonces $x^N = 0$. Vemos así que: $x = \begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix}$ donde $x^b = B^{-1}b \geq 0$ en \mathbb{R}^m y $x^N = 0$ en \mathbb{R}^{n-m} . Como habíamos predicho para la caracterización de un punto extremo de P .

Para mostrar que las columnas a^1, \dots, a^k son linealmente independientes seguiremos un argumento por contradicción: suponemos que no lo son, luego existen coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ no nulos tales que $\lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_k a^k = 0$, por lo tanto si definimos el vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k; 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ encontramos que $A\lambda = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned} A(x + p\lambda) &= Ax + pA\lambda \\ &= Ax = b \end{aligned}$$

para cualquier escalar $p \in \mathbb{R}$. Eligiendo $p > 0$ suficientemente pequeño podemos asegurar que $x \pm p\lambda \geq 0$ debido a que las componentes x_1, \dots, x_k de x son positivas. Esto muestra que $x^1 = x + p\lambda \in P$, $x^2 = x - p\lambda \in P$, además $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ lo que contradice la suposición de que x es un punto extremo de P . Por esta razón no podemos afirmar que los vectores a^1, \dots, a^k son dependientes y debemos concluir que son linealmente independientes.

Recíprocamente si encontramos que las primeras m columnas de A son linealmente independientes y forman una matriz invertible $B = [a^1, \dots, a^m]$ de dimensión $m \times m$ tal que $B^{-1}b \geq 0$ entonces un punto $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ es un punto de P . Observe que la afirmación de que las m columnas linealmente independientes de A ocupan las m primeras posiciones es completamente arbitraria.

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} B : N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix} = Bx^b + Nx^N \\ &= B(B^{-1}b) + N(0) = b \end{aligned}$$

además $x \geq 0$ porque $B^{-1}b \geq 0$ así que $x \in P$. Veremos que x debe ser punto extremo de P . Supongamos que podemos expresar a x como $x = \lambda_1 y + \lambda_2 z$ donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; $y, z \in P$. Si representamos a y, z como

$$y = \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} z^b \\ z^N \end{pmatrix}$$

donde $y^b, z^b \in \mathbb{R}^m$; $y^N, z^N \in \mathbb{R}^{n-m}$, encontramos:

$$\begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} z^b \\ z^N \end{pmatrix}$$

y puesto que $x^N = 0$; $y^N, z^N \geq 0$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ debemos concluir que $y^N = z^N = 0$. Por otra parte $y, z \in P$, entonces $Ay = b$, $Az = b$ luego

$$\begin{bmatrix} B : N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} = By^b + Ny^N = By^b = b$$

así que $y^b = B^{-1}b$ de manera que

$$y = \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^b \\ x^N \end{pmatrix} = x.$$

Análogamente $z = x$, lo cual comprueba que x es un punto extremo de P por que no admite una expresión como una combinación convexa no trivial de otros puntos de P .

15.0.5. Direcciones extremas

Dado un poliedro P en la forma estándar (??) su cono de recesión está definido como:

$$\text{rec}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n / Ay = 0; y \geq 0\}.$$

El lector debería probar esta afirmación. Veremos que cada dirección extrema y de P está caracterizada por el hecho de que podemos encontrar m columnas linealmente independientes de A , que sin pérdida de generalidad supondremos que ocupan las primeras m posiciones, las cuales forman una matriz no singular $B = [a^1, \dots, a^m]$ tal que $-B^{-1}a^j \geq 0$ para alguna columna a^j diferente a las que conforman B , es decir con $j > m$, donde:

$$y = \rho \begin{pmatrix} -B^{-1}a^j \\ e^j \end{pmatrix}$$

siendo ρ un escalar positivo y e^j el vector en \mathbb{R}^{n-m} compuesto de ceros excepto en la posición j que contiene un uno tomando la numeración $j = m + 1, \dots, n$.

Supongamos que y es una dirección extrema de P , entonces $Ay = 0$ con $y \geq 0$ debido a que y es dirección de recesión para P . El vector y tiene componentes positivas y nulas que sin pérdida de generalidad ordenaremos como: $y = (y_1, \dots, y_k; 0, \dots, y_j, \dots, 0)$ donde $y_i > 0 \forall i = 1, \dots, k; i = j$, en caso contrario $y_i = 0$. Veremos más adelante que las columnas a^1, \dots, a^k son linealmente independientes. Podemos observar que $a^j \in \text{spar}\{a^1, \dots, a^k\}$ debido a que $Ay = 0$ luego:

$$y_1 a^1 + \dots + y_k a^k + y_j a^j = 0$$

donde $y_j > 0$. Puesto que el $\text{rango}(A) = m$ tenemos $m \geq k$, y podemos encontrar $m - k$ columnas adicionales, que sin pérdida de generalidad supondremos que ocupan las $m - k$ posiciones siguientes: a^{k+1}, \dots, a^m , así que $B = [a^1, \dots, a^m]$ es una matriz invertible de dimensión $m \times m$ donde $j > m$. Como $Ay = 0$ tenemos

$$\begin{bmatrix} B \\ N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} = 0$$

así que $By^b + Ny^N = 0$ pero $y_i = 0 \forall i \in \{k + 1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ entonces:

$$\begin{aligned} by^b + Ny^N &= by^b + y_j a^j = 0 \\ y^b &= -y_j B^{-1} a^j \\ y^N &= y_j (e^j) \\ &= (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

donde el 1 está en la posición j . Luego

$$y = \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} = y_j \begin{pmatrix} -B^{-1}a^j \\ e^j \end{pmatrix}$$

como habíamos previsto que se caracterizaría cada dirección extrema de P .

Para mostrar que las columnas a^1, \dots, a^k son linealmente independientes procedemos de la misma manera como lo hicimos en la caracterización de los puntos extremos de P : supondremos que a^1, \dots, a^k son linealmente dependientes, entonces existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ no todos nulos tales que $\lambda_1 a^1 + \dots +$

$\lambda_k a^k = 0$. Si definimos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k; 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ encontramos que $A\lambda = 0$ así que

$$A(y + p\lambda) = Ay + pA\lambda = 0$$

para cualquier escalar p . Si elegimos $p > 0$ suficientemente pequeño encontramos que: $y \pm p\lambda \geq 0$ debido a que $y_1, \dots, y_k > 0$, entonces $y \pm p\lambda$ son direcciones de recesión de P , por lo tanto: $y = \frac{1}{2}y^1 + \frac{1}{2}y^2$ donde $y^1 = y + p\lambda$, $y^2 = y - p\lambda$ lo cual contradice el hecho que y es dirección extrema. Concluimos que a^1, \dots, a^k son linealmente independientes.

Supongamos ahora que las primeras m columnas a^1, \dots, a^m de la matriz A son linealmente independientes y forman una matriz no singular $B = [a^1, \dots, a^m]$ de dimensión $m \times m$ tal que $B^{-1}a^j \leq 0$ para alguna columna a^j de A no incluida en B , es decir con $j > m$. Veremos que

$$y = \begin{pmatrix} -B^{-1}a^j \\ e^j \end{pmatrix}$$

es una dirección extrema de P . Sea $N = [a^{m+1}, \dots, a^n]$ la matriz de dimensión $m \times (n - m)$ formada por las restantes $n - m$ columnas de A no incluidas en B . Puesto que y se puede expresar como

$$y = \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix}$$

con $y^b \in \mathbb{R}^m$; $y^N \in \mathbb{R}^{n-m}$, donde $y^b = -B^{-1}a^j$; $y^N = e^j$ tenemos que

$$\begin{aligned} Ay &= \begin{bmatrix} B \\ N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} \\ &= By^b + Ny^N \\ &= B(-B^{-1}a^j) + Ne^j \\ &= -a^j + a^j = 0 \end{aligned}$$

además $y \geq 0$ porque $y^b = -B^{-1}a^j \geq 0$, lo que muestra que y es una dirección de recesión de P . Veremos ahora que se trata de una dirección extrema de P . Supongamos que z, w son direcciones de recesión de P tales que $y = \lambda_1 z + \lambda_2 w$ donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. puesto que las componentes $i \in \{m+1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ de y son nulas, tenemos que las componentes $i = m+1, \dots, n$ con $i \neq j$ en z y w deben ser nulas también, así que podemos expresar a z y w en la forma:

$$z = \gamma_1 \begin{pmatrix} z^b \\ z^N \end{pmatrix}; \quad w = \gamma_2 \begin{pmatrix} w^b \\ w^N \end{pmatrix}$$

donde $\gamma_1 \geq 0$ y $\gamma_2 \geq 0$ no siendo ambos nulos, de hecho: $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ porque $y^N = e^j = \gamma_1 e^j + \gamma_2 e^j$. Por lo tanto:

$$y = \lambda_1 \gamma_1 \begin{pmatrix} z^b \\ e^j \end{pmatrix} + \lambda_2 \gamma_2 \begin{pmatrix} w^b \\ e^j \end{pmatrix}$$

si $\gamma_2 = 0$ tenemos $1 = \lambda_1 \gamma_1$ y concluimos que

$$\begin{pmatrix} y^b \\ y^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^b \\ z^N \end{pmatrix}$$

así que $z = \gamma_1 y$, como $\gamma_1 > 0$ tenemos que z es paralelo a y . Análogamente si $\gamma_1 = 0$ concluimos que w es paralelo a y . Cuando $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} y^b \\ e^j \end{pmatrix} = e_1 \begin{pmatrix} z^b \\ e^j \end{pmatrix} + e_2 \begin{pmatrix} w^b \\ e^j \end{pmatrix}$$

con $e_1, e_2 > 0$. Sabemos que $\begin{pmatrix} z^b \\ e^j \end{pmatrix}$ es dirección de P , entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B \vdots N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z^b \\ e^j \end{pmatrix} &= Bz^b + Ne^j \\ &= Bz^b + a^j = 0 \end{aligned}$$

luego $z^b = -B^{-1}a^j$ así que $\begin{pmatrix} z^b \\ e^j \end{pmatrix} = y$. Análogamente $\begin{pmatrix} w^b \\ e^j \end{pmatrix} = y$, luego y es dirección extrema de P .

Capítulo 16

Fundamentos del método Simplex

Los elementos de análisis convexo y el estudio que hemos hecho de los poliedros nos permitirá proponer un método práctico para resolver problemas lineales dados en la forma estándar:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c \cdot x \\ & \text{s.a.} \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{16.1}$$

donde A es una matriz de dimensiones $m \times n$ con rango m , $b \in \mathbb{R}^m$. Presentaremos aquí los fundamentos de tal método conocido como: SIMPLEX. Ya hemos visto que un programa lineal como (??) alcanza un óptimo en alguno de sus puntos extremos cuando está acotado interiormente.

También hemos visto que el conjunto factible de (??) tiene al menos un punto extremo (¿Por qué?). Supongamos que el poliedro

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b; x \geq 0\}. \tag{16.2}$$

representa el conjunto factible del programa lineal (??). Tomemos \bar{x} como un punto extremo de P y apliquemos la caracterización de los puntos extremos de poliedros, dados en la forma estándar, que hemos visto en la sección anterior. Entonces existen m columnas de la matriz A linealmente independientes, que sin pérdida de generalidad supondremos ocupan las primeras m columnas de A y forman una matriz cuadrada, no singular B con dimensiones $m \times m$, la cual cumple: $B^{-1}b \geq 0$ y nos permite expresar a \bar{x} como:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}^b \\ \bar{x}^N \end{pmatrix} \tag{16.3}$$

donde $B^{-1}b = \bar{x}^b$; $0 = \bar{x}^N$ siendo \bar{x}^b el vector compuesto por las primeras m entradas de \bar{x} y \bar{x}^N el vector compuesto por las últimas $n - m$ componentes de

\bar{x} . Observamos que el valor que toma la función objetivo del programa lineal (??) en el punto extremo \bar{x} es:

$$c \cdot \bar{x} = c^b \cdot \bar{x}^b + c^N \cdot \bar{x}^N = c^b \cdot \bar{x}^b$$

donde c^b representa las primeras m entradas del vector $c \in \mathbb{R}^n$.

Sea x una solución factible de (??), por lo tanto x es un punto arbitrario del poliedro P en (??). Puesto que la matriz A en (??) se puede expresar como:

$A = \left[B : N \right]$ donde B es la matriz invertible $m \times m$ formada por las primeras m columnas de A , las cuales hemos supuesto son linealmente independientes y permiten caracterizar al punto extremo \bar{x} en la forma (??); tenemos así que las ecuaciones lineales: $Ax = b$ toman la forma:

$$\left[B : N \right] \begin{pmatrix} \bar{x}^b \\ \bar{x}^N \end{pmatrix} = b$$

y por lo tanto $Bx^b + Nx^N = b$ de donde:

$$\begin{aligned} x^b &= B^{-1}(b - Nx^N) \\ &= B^{-1}b - B^{-1}Nx^N. \end{aligned}$$

Observe que esta ecuación tiene lugar en \mathbb{R}^m . Si queremos representar el valor de la función objetivo del programa lineal (??) en el punto x encontramos:

$$\begin{aligned} c \cdot x &= c^b \cdot x^b + c^N \cdot x^N \\ &= c^b \cdot (B^{-1}b - B^{-1}Nx^N) + c^N \cdot x^N \\ &= c^b \cdot B^{-1}b + (c^N - c^b B^{-1}N) \cdot x^N \\ &= c^b \cdot \bar{x}^b + (c^N - c^b B^{-1}N) \cdot x^N \end{aligned}$$

siendo $c^N - c^b B^{-1}N$ un vector fila en \mathbb{R}^{n-m} . Si todas las entradas de $c^N - c^b B^{-1}N$ son no negativas: $c^N - c^b B^{-1}N \geq 0$ encontramos que $(c^N - c^b B^{-1}N) \cdot x^N \geq 0$ porque $x \geq 0$, así que

$$c \cdot x \geq c^b \cdot \bar{x}^b = c \cdot \bar{x}$$

lo cual nos permite concluir que el punto extremo \bar{x} es una solución factible óptima del programa lineal (??) porque x fue elegido de manera arbitraria.

Supongamos que esto no ocurre, supongamos que no es cierto que $c^N - c^b B^{-1}N$ tenga todas sus componentes positivas o nulas. En este caso existe un $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $c_j - c^b B^{-1}a^j < 0$ donde a^j es la columna que ocupa la posición j en la matriz A . Puesto que $j > m$, a^j no está incluida en la familia de m columnas que forman la matriz B . Definimos $y^j \in \mathbb{R}^m$ como $y^j = B^{-1}a^j$ y definimos $d^j \in \mathbb{R}^n$ como $d^j = \begin{pmatrix} -y^j \\ e^j \end{pmatrix}$ donde e^j representa el hecho de que todas las últimas $n - m$ entradas de d^j son nulas a excepción de aquella en la

posición $m + j$ la cual contiene un 1. Si $y^j \leq 0$ entonces $d^j \geq 0$ y satisface $Ad^j = 0$ por que

$$\begin{aligned} Ad^j &= \begin{bmatrix} B : N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -y^j \\ e^j \end{pmatrix} \\ &= -By^j + Ne^j \\ &= -BB^{-1}a^j + a^j \\ &= -a^j + a^j = 0. \end{aligned}$$

Por esta razón d^j es una dirección de recesión de P :

$$\text{rec}(P) = \{z : Az = 0z; z \geq 0\}.$$

Dado $x \in P$, tenemos que $x + \lambda d^j \in P$ para todo $\lambda > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} c \cdot (x + \lambda d^j) &= c \cdot x + \lambda c \cdot d^j \\ &= c \cdot x + \lambda(c_j - c^b B^{-1}a^j) \end{aligned}$$

por definición de y^j y de d^j . Como $c_j - c^b B^{-1}a^j < 0$ vemos que el valor de $c \cdot x$ se puede hacer arbitrariamente grande con signo negativo, por lo tanto el problema (??) no está acotado inferiormente. Esto muestra que cuando $y^j \leq 0$, entonces el programa lineal (??) no está acotado inferiormente y además podemos establecer una dirección de recesión sobre la cual la función objetivo no está acotada inferiormente.

Supongamos que no se cumple que las componentes de y^j sean negativas o nulas: $y^j = B^{-1}a^j \not\leq 0$, entonces existe un $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $y_k^j > 0$ y podemos definir

$$\gamma = \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} : y_k^j > 0 \right\}.$$

Supongamos que $\gamma = \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} > 0$ donde $1 \leq k \leq m$, entonces definimos:

$$x = \bar{x} + \gamma d^j = \begin{pmatrix} \bar{x}^b - \gamma y^j \\ \gamma e^j \end{pmatrix} = b.$$

Notamos que $x \geq 0$; cuando $y_k^j \leq 0$ tenemos $-\gamma y_k^j \geq 0$ luego: $\bar{x}^b - \gamma y_k^j \geq \bar{x}^b \geq 0$. Cuando $y_k^j > 0$, $\gamma \leq \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j}$ luego: $0 \leq \bar{x}^b - \gamma y_k^j$. Concluimos que $x \geq 0$. Además

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} B : N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}^b - \gamma y^j \\ \gamma e^j \end{pmatrix} \\ &= B\bar{x}^b - \gamma B y^j + \gamma N e^j \\ &= B\bar{x}^b - \gamma B(B^{-1}a^j) + \gamma a^j \\ &= B\bar{x}^b \\ &= B(B^{-1}b) \\ &= b \end{aligned}$$

x es una solución factible.

Observamos que $\gamma = \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j}$ para algún $k \in \{1, \dots, m\}$ con $y_k^j > 0$ entonces $x_k = \bar{x}_k^b - \left(\frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j}\right)y_k^j = 0$. Por lo tanto los componentes $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m; x_j$ son posiblemente, las únicas componentes positivas de x . Podemos encontrar una colección de m columnas de A linealmente independientes que incluya explícitamente a la columna a^j ; lo cual muestra que x es un nuevo punto extremo del conjunto factible P . La ventaja de este punto extremo es que la función objetivo toma un mejor valor:

$$\begin{aligned} c \cdot x &= c \cdot \bar{x} + \gamma c \cdot d^j \\ &= c^b \cdot \bar{x}^b + \gamma(c_j - c^b \cdot y^j) \\ &= c^b \cdot \bar{x}^b + \gamma(c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j) \end{aligned}$$

como habíamos supuesto que $\gamma > 0$, $c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j < 0$ entonces $\gamma(c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j) < 0$

$$\begin{aligned} c^b \cdot \bar{x}^b + \gamma(c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j) &= c \cdot x \\ &< c^b \cdot \bar{x}^b = c \cdot \bar{x} \end{aligned}$$

asi hemos encontrado un punto extremo x que proporciona una mejor solución factible que el punto extremo \bar{x} que estábamos estudiando.

Los argumentos presentados aquí son la base del método Simplex, el cual es un algoritmo general para resolver programas lineales en la forma estándar.

Dada la caracterización de los puntos extremos del poliedro P , podemos determinar un punto extremo \bar{x} de P a partir de un conjunto apropiado de m columnas linealmente independientes de la matriz A . Con estas m columnas que por comodidad hemos supuesto ocupan las primeras m posiciones, descomponemos la matriz A como $A \equiv \left[B : N \right]$ y encontramos $\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $\bar{x}^b = B^{-1}b \geq 0$.

Resumiendo el análisis previo, si ocurre que $c^N - c^b B^{-1}N \geq 0$ concluimos que \bar{x} es una solución factible óptima del programa lineal en la forma estándar (??). En caso contrario, existe un $j \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $c_j - c^b B^{-1}a^j < 0$ y definimos $y^j \equiv B^{-1}a^j$ donde a^j es la columna j -ésima de A que se encuentra en el bloque N . Si $y^j \leq 0$ el vector $d^j = \begin{pmatrix} -y^j \\ e^j \end{pmatrix}$ es una dirección de recesión del conjunto factible P sobre la cual la función objetivo no está acotada:

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \gamma d^j \in P \quad \forall \gamma > 0 \\ c \cdot x &= c \cdot \bar{x} + \gamma c \cdot d^j \\ &= c^b \cdot \bar{x}^b + \gamma(c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j) \end{aligned}$$

el cual puede hacerse arbitrariamente grande con signo negativo, eligiendo $\gamma > 0$ apropiadamente.

Finalmente si $y^j \not\leq 0$, podemos definir $\gamma = \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_k}{y_k^j} : y_k^j > 0 \right\}$ y encontramos que $x = \bar{x} + \gamma d^j$ es un nuevo punto extremo de P , donde la función objetivo toma un menor valor que en \bar{x} , siempre que $\gamma > 0$.

De esta manera vemos que existe un procedimiento para recorrer sistemáticamente los puntos extremos del poliedro P , de tal manera que en cada paso obtenemos una solución factible que produce un *mejor* valor para la función objetivo.

A partir de este resultado y el conocimiento general de los programas lineales, vemos que en principio, podemos hallar una solución factible óptima debido a que si el programa está acotado, tendrá su solución en un punto extremo. Por esta razón el algoritmo debe decidir en un número finito de pasos, si el problema no está acotado o si por el contrario tiene su solución en un punto extremo, entonces el algoritmo nos llevará a tal solución factible óptima.

Capítulo 17

Implementación del método Simplex

1. Presentar un punto extremo \bar{x} y su correspondiente caracterización presentando una matriz invertible $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que: $A = \left[B : N \right]$ donde $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^b \\ \bar{x}^N \end{pmatrix}$ con $\bar{x}^N = 0_{n-m}$; $\bar{x}^b = B^{-1}b \geq 0$, y donde $c \cdot x = c^b \cdot \bar{x}^b$.
2. Observar los signos en el vector $n - m$ dimensional $c^N - c^b B^{-1}N$.
3. Si los valores dados en ?? son no negativos, nos detenemos y presentamos \bar{x} como una solución factible óptima.
4. Si algún signo de los valores en ?? es negativo tenemos: $c_j - c^b B^{-1}a^j < 0$ con $j \in \{m + 1, \dots, n\}$ y definimos $y^j \equiv B^{-1}a^j$.
5. Si $y^j \leq 0$ el vector $d^j = \begin{pmatrix} y^j \\ e^j \end{pmatrix}$ nos brinda una dirección extrema sobre la cual la función objetivo no está acotada. Nos detendremos porque el problema no está acotado.
6. Si $y_k^j > 0$ algún $k \in \{1, \dots, m\}$, es decir, si hay un valor positivo entre los valores estudiados es ??, con ellos definimos el valor $\gamma = \min_{1 \leq k \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} : y_k^j > 0 \right\}$ y encontramos $\gamma = \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} > 0$ donde $k \in \{1, \dots, m\}$.
7. $x = \bar{x} + \gamma d^j$ es un punto extremo cuyas componentes, posiblemente, no nulas son: $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m; x_j$ por lo cual podemos encontrar una selección de m columnas de A que sean linealmente independientes y que incluya la columna a^j y con seguridad no incluya a la columna a^k .
8. Podemos intercambiar el papel de la columna a^j con la columna a^k y encontrar una nueva matriz no singular \tilde{B} de $m \times m$ que nos permite

expresar la nueva matriz A (después del intercambio) como $\tilde{A} = \left[\tilde{B} : \tilde{N} \right]$ que representa al punto extremo $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \dots, x_k, \dots)$ como $x = \begin{pmatrix} \tilde{x}^b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. El valor de la función objetivo en este nuevo punto extremo es:

$$\begin{aligned}
 c \cdot x &= c \cdot \bar{x} + \gamma c \cdot d^j \\
 &= c^b \cdot \bar{x}^b + \gamma(c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j) < c \cdot \bar{x} \\
 &= c^b \cdot \bar{x}^b + \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} (c_j - c^b \cdot B^{-1}a^j) \\
 &= c^b \cdot \bar{x}^b + \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} \left(c_j - \sum_{i=1}^m c_i y_i^j \right) \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m c_i \left(\bar{x}_i - \frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} y_i^j \right) + c_j \left(\frac{\bar{x}_k^b}{y_k^j} \right)
 \end{aligned}$$

10. Repetir nuevamente el procedimiento empleando el punto extremo $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \dots, x_m, 0, \dots, 0 \dots)$ determinado por la independencia lineal de las m primeras columnas de la matriz $\hat{A} = \left[\hat{B} : \hat{N} \right]$, donde \hat{B} y \hat{N} se diferencian en que hemos cambiado la columna a^j en N por la columna a^k en B .

Capítulo 18

Algoritmo y tabla del método Simplex

FALTA

Capítulo 19

Software disponible para programación lineal

La programación matemática es, hoy en día, una de las áreas más estudiadas y trabajadas en el mundo técnico y científico. De hecho toda labor en ingeniería intenta modelar el mundo a través de modelos matemáticos que reproduzcan la realidad de la mejor forma posible. Los problemas de programación matemática son problemas particulares comunes y existen una gran variedad de herramientas, teorías y paquetes de software disponibles para su solución. Dentro de esta categoría existen tipos de problemas que no son fáciles de tratar como:

1. Problemas lineales con gran número de variables y/o restricciones
2. Problemas de programación no lineales
3. Optimización a gran escala

entre otros. Dado que en la práctica es casi imposible solucionar problemas grandes sin la ayuda de buen software, haremos una breve descripción del lenguaje AMPL donde se explicará su naturaleza, sintaxis y modo de uso junto con problemas clásicos de optimización y su solución.

AMPL es un paquete de software desarrollado en Bell Labs por R. Fourer, D.M. Gay y B. W. Kernighan en 1985 C [?]. A grandes rasgos es un lenguaje de modelaje algebraico para problemas de optimización lineales y no lineales, en variables continuas o discretas. AMPL permite que el usuario utilice un lenguaje algebraico para plantear modelos de optimización y examinar soluciones mientras que el computador se comunica con un solucionador particular. La versión profesional de AMPL no tiene límites en el número de variables y restricciones que puede manejar, excepto por la capacidad del computador donde éste está instalado.

AMPL realmente es una interfaz entre el usuario y el solucionador. El papel que juega AMPL es el de proveer una interfaz sencilla con diferentes solucionadores o *solvers*. El proceso para solucionar un problema de optimización utilizando este software se puede enumerar en los siguientes pasos:

1. Plantear el modelo del problema a resolver, el sistema de variables, objetivos y restricciones que representan el modelo general.
2. Especificar los datos que definen el problema en particular.
3. Solucionar el problema indicándole a AMPL el tipo de solucionador que utiliza un algoritmo ideal para el tipo de problema.
4. Extraer información del solucionador y analizar los resultados.
5. Refinar el modelo y datos si es necesario repetir el análisis.

Como se puede observar AMPL realmente es una interfaz entre el usuario y el solucionador que éste escoja para resolver su problema. Esto puede parecer trivial pero la forma como una persona formula un problema, en general, es bastante diferente a la forma en que lo entiende un solucionador y el proceso de traducción de uno a otro es costoso en tiempo y propenso a errores.

Una ventaja notable de AMPL sobre otros programas similares es que la notación utilizada para definir expresiones matemáticas es muy parecida a la algebraica estándar. Transcribir expresiones matemáticas a lenguaje AMPL es trivial y no requiere notación distinta a la algebraica. AMPL también extiende la notación algebraica para expresar estructuras comunes de programación matemática tales como restricciones en flujo de redes y otros.

AMPL provee un ambiente de comandos interactivo para plantear y resolver problemas de programación matemática. Tiene una interfaz flexible que permite utilizar diferentes solucionadores, sin necesidad de modificar los modelos, para permitir el refinamiento de soluciones. Una vez que se ha encontrado la solución óptima AMPL la transforma automáticamente a la forma del modelo para que se pueda analizar directamente; también provee una gran cantidad de herramientas para formatear, examinar e imprimir resultados.

La versión de evaluación de AMPL, junto con algunos solucionadores, se puede encontrar gratuitamente en la página web: www.ampl.com, las plataformas que están soportadas son Windows, Unix/Linux y Mac OS X.

19.1. Instalación

La instalación de este paquete de software en versión de estudiante es muy sencilla y se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Entrar a la página web de AMPL: <http://www.ampl.com>
2. Seguir el hipervínculo: “download the Student Edition”.
3. Escoger una de las tres opciones que se presentan: utilizar la versión de navegador, bajar la versión para Windows o para Unix y seguir las instrucciones particulares.

Navegador: la versión de navegador le permite al usuario enviar modelos y archivos de datos a un servidor para que estos los resuelva. También permite extraer datos, una vez solucionado el modelo, en cantidad restringida. La versión de navegador de AMPL permite solucionar modelos con un límite de variables (menos de 300) y hacer hasta cinco consultas sobre la solución del problema. Los pasos para utilizar esta modalidad son:

- a) Presionar el hipervínculo “Try AMPL!”.
- b) Aceptar las condiciones de uso.
- c) Escoger uno de los modelos que se proponen en la página o cargar un modelo propio.
- d) Repetir el procedimiento anterior con el archivo de datos.
- e) Utilizar el botón “Submit” para indicarle al servidor que cargue el modelo, los datos.
- f) Escribir los comandos para extraer información en la caja de “**AMPL commands:**”
- g) Escoger el solucionador deseado y presionar el botón “Send” para indicarle al servidor que corra el modelo y ejecute los comandos.
- h) Leer la información de la caja de texto “**Output 1 from AMPL:**”.

Esta opción de la página de AMPL no instala ningún programa en el computador y es útil para revisar los ejemplos que se explican en el libro [?].

Windows: la versión windows para AMPL se obtiene descargando el archivo “amplclm.zip”. La instalación se completa siguiendo los siguientes pasos:

- a) Expandir el archivo amplclm.zip.
- b) El proceso de extracción crea una carpeta llamado amplcml que contiene el programa estándar de AMPL (ampl.exe), una utilidad llamada “scrolling-window utility”(sw.exe), ejecutables para dos solucionadores: MINOS 5.5 (minos.exe) y CPLEX 8.0 (cplex.exe y cplex80.dll), y el cliente Kestrel (kestrel.exe) que provee acceso gratuito a más de una docena de solucionadores vía internet.

Para correr AMPL con estos archivos haga doble click sobre sw.exe y escriba `ampl`, en la ventana que aparece, para cargar el programa AMPL. La ventana se debe ver de la siguiente forma:

```
sw: ampl
ampl:
```

ahora puede teclear comandos en la línea como se explica en [?] o en la sección ???. El solucionador por defecto es MINOS. Para utilizar CPLEX teclee el comando: `option solver cplex` o `option solver kestrel` si desea utilizar el cliente Kestrel.

Unix: Para sistemas operacionales tipo Linux siga los siguientes pasos:

- a) Obtenga el archivo .gz apropiado para el sistema en el que desee instalar el programa.
- b) Expanda el archivo, utilizando `gzip`, para obtener uno nuevo de nombre `ampl`.
- c) Adicione el directorio donde se encuentra `ampl` al *search path* de su usuario.
- d) Otórguele permisos de ejecución al archivo `ampl`.
- e) Descargue los solucionadores que desee siguiendo el link “solver download instructions”.
- f) Adicione a su *search path* la carpeta donde se encuentran los solucionadores.

Para utilizar AMPL teclee `ampl` en una ventana de terminal con línea de comandos, esta debe cambiar a

```
ampl:
```

Al finalizar estos 3 pasos la versión de estudiante de AMPL estará instalada en su computador, esta versión permite trabajar con problemas de hasta 300 variables y un total de 300 objetivos y restricciones. La versión profesional no tiene ningún límite intrínseco ni en el número de variables ni en el de objetivos y restricciones. La licencia profesional de AMPL se puede obtener a través de uno de los distribuidores que se listan en <http://www.ampl.com/vendors.html>. Para este proyecto hemos obtenido una licencia profesional de AMPL en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, con fines educativos y de investigación.

19.2. Solucionadores

Como se explicó en la introducción de este capítulo AMPL no resuelve los problemas de optimización directamente. AMPL se vale de solucionadores (*solvers*) para esta tarea, su tarea es entregar el modelo y los datos al solucionador especificado por el usuario y extraer la información que retorna éste.

Debido a la amplia gama de problemas de optimización (lineales, no lineales, continuos, discretos, etc ...) y a su vez a la diversidad de algoritmos de solución que se pueden utilizar para cada tipo de problemas, es necesario escoger el solucionador adecuado para cada tipo de problema. A la fecha se pueden encontrar en la página de AMPL (<http://www.ampl.com/solvers.html>) 27 solvers distintos. Para ver un pequeño listado de los solucionadores que hemos utilizado remítase a el cuadro ???. Algunos solucionadores son de libre distribución y código abierto, otros necesitan licencias especiales para poder trabajar.

Vale la pena anotar que AMPL también puede trabajar con solucionadores desarrollados por usuarios. AMPL posee una interfaz pública y documentada que se puede utilizar para solucionadores personales. La interfaz trabaja a

Solucionador	Problema	Solucionador	Problema
CPLEX	Lineal (simplex)	MINOS	Lineal (simplex) No lineal
	Lineal (interior)		
	Red		
	Cuadrático		
	Entero lineal		
	Entero cuadrático		
DONLP2	No lineal	KNITRO	No lineal

Cuadro 19.1: Algunos solucionadores que funcionan con AMPL, y los tipos de problema (algoritmo) que utilizan.

través de archivos; AMPL escribe un archivo con el problema que debe ser leído por el solucionador que escribe un archivo de solución que lee AMPL. El formato de éste archivo tiene versiones equivalentes en binario y ASCII. Esta característica ofrece la flexibilidad necesaria para soportar una gran variedad de solucionadores.

La interfaz de AMPL se puede encontrar en la siguiente página web: <http://www.ampl.com/REFS/abstracts.html#hooking2>. También es posible descargar rutinas estándar de interfaz (en C) para leer y escribir los archivos formateados de AMPL, ir a <http://www.ampl.com/hooking.html> para más detalles.

Para indicarle a AMPL que se desea trabajar con un solucionador particular de nombre *nombre_solucionador* se utiliza la siguiente sintaxis en la línea de comandos (antes de solucionar el problema):

```
ampl: option solver nombre_solucionador
```

La documentación para cada solucionador se puede encontrar con el distribuidor particular de cada uno, o en algunos casos en la página web de AMPL.

19.3. Elementos de Modelaje

Para poder trabajar con AMPL se debe correr el programa escribiendo el comando `AMPL` en una línea de comandos como se describió en ???. Si se está utilizando una interfaz de texto lo primero que se debe ver en ésta, inmediatamente se haya ejecutado AMPL, es:

```
ampl:
```

Una vez se esté en esta situación AMPL está listo para interpretar sus comandos. Como en la mayoría de programas que interpretan comandos AMPL espera hasta que se presione la tecla “enter” o “return” para procesar lo que se ha escrito en la línea.

Todo comando de AMPL finaliza con un punto y coma (;). Si usted teclea uno o más comandos completos en una línea AMPL los procesa, imprime los mensajes apropiados y retorna la línea de comandos `ampl:` nuevamente. Si usted finaliza (presionando “enter” sin haber escrito “;”) una línea sin haber terminado el comando, AMPL lo invita a finalizar este en la siguiente línea; esta invitación

se puede identificar porque la nueva línea de comandos que se le presenta termina en una interrogación y no en dos puntos:

```
AMPL?
```

El número de caracteres que se pueden teclear en una línea de comandos está limitado por el sistema operacional particular que se esté utilizando y se pueden utilizar tantas líneas como sea necesario para completar un comando.

AMPL trabaja principalmente con dos tipos de archivos:

- El archivo donde se encuentra el modelo (identificado generalmente por tener una extensión `.mod`).
- Un archivo opcional donde se le indican los valores numéricos de los diferentes parámetros y los elementos de los conjuntos requeridos por el modelo. Este archivo generalmente tiene extensión `.dat`.

El primer archivo define el *modelo* del problema a resolver. Este modelo debe seguir unas reglas de sintaxis bien definidas. Una de las grandes ventajas de trabajar con AMPL es que la sintaxis para escribir modelos es muy parecida a la sintaxis que se utiliza en la formulación algebraica de los problemas de optimización. El segundo archivo le indica a AMPL qué elementos hacen parte de los conjuntos o los valores de los parámetros que se definen en el modelo del problema. La opción de poder definir un modelo simbólicamente y definir los valores particulares para un tipo de problema hace que AMPL sea muy versátil en el sentido que un sólo modelo bien definido puede ser utilizado para resolver diferentes tipos de problemas cambiando solamente el archivo de datos.

Existen varios comandos que utilizan nombres de archivos para leer o escribir información. El nombre de un archivo puede ser una secuencia cualquiera de caracteres (excepto por el punto y coma `;` o comillas `'` o `"`). Las reglas que determinan la correcta escritura de los nombres de los archivos están determinadas por el sistema operacional.

Para finalizar una sesión de AMPL se puede utilizar el comando `end` o `quit`.

19.3.1. Carga y solución de modelos y datos

Para aplicar un solucionador a un modelo en particular se deben utilizar los comandos `model`, `data` y `solve`:

```
AMPL: model transp.mod; data assign.dat; solve
CPLEX 8.0.0: optimal solution; objective 28
24 dual simplex iterations (0 in phase I)
```

El comando `model` carga un archivo que contiene las especificaciones del modelo, el comando `data` carga otro archivo que contiene los valores para los componentes del modelo. El comando `solve` hace que se le envíe una descripción del modelo a un solucionador y que los resultados estén listos para ser examinados.

AMPL mantiene un único modelo en memoria que se enviará al solucionador cuando se utilice el comando `solve`. Al comenzar una sesión el modelo está vacío.

El comando `model` lee declaraciones de un archivo y las añade al modelo actual; el comando `data` lee declaraciones de un archivo que proporciona valores a componentes que ya están en el modelo. Esto permite utilizar varias veces el comando `model` o `data` para construir una descripción de un problema de optimización a partir de diferentes archivos.

Es posible declarar partes del modelo o asignar valores a los componentes directamente por la línea de comandos. Pero dado que los comandos que definen partes del modelo o asignan valores son parecidos hay que indicarle a AMPL qué tipo de comando (de modelo o de datos) se está tecleando. Por defecto AMPL está en modo *model*, el comando `data` (sin ser seguido del nombre de un archivo) cambia a modo *data* y el comando `model` (sin ser seguido del nombre de un archivo) retorna al modo *model*.

Si un modelo declara más de una función objetivo AMPL, por defecto, las pasa todas al solucionador. La mayoría de solucionadores sólo trabajan con una función objetivo y generalmente seleccionan la primera de ellas por defecto. El comando `objective` permite seleccionar una de las funciones objetivo del modelo para ser entregada al solucionador; la sintaxis de este comando es la palabra clave `objective` seguido de un nombre definido en una declaración de tipo `minimize` o `maximize`:

```
ampl: objective Nombre_función
```

El comando `solve` pone en marcha una serie de actividades:

1. Hace que AMPL genere un problema de optimización específico a partir del modelo y los datos que se le han entregado. Si hacen falta datos o el modelo está incompleto imprime un mensaje de error. También se generan mensajes de error si los datos violan alguna restricción impuesta por el modelo. Errores aritméticos, como división por 0, son detectados, también, en este momento.
2. AMPL entra en una etapa de pre-solución que intenta simplificarle el problema al solucionador. En algunos casos la pre-solución detecta la imposibilidad de encontrar una solución óptima, imprime un mensaje de error explicativo y no envía el problema al solucionador.
3. Se envía el problema (posiblemente simplificado) al solucionador por defecto o el escogido por el usuario. A menos que el usuario provea valores iniciales para las variables a encontrar, AMPL no le envía puntos iniciales al solucionador excepto si ya se ha invocado el comando `solve` previamente. En este caso AMPL utiliza las soluciones que se encontraron y las utiliza como puntos iniciales. Para evitar que AMPL envíe soluciones previas como puntos iniciales se debe utilizar el comando `reset`. Este comando elimina el modelo de memoria.
4. AMPL imprime los mensajes que envía el solucionador (la cantidad de mensajes se puede ampliar o reducir modificando las opciones particulares de cada solucionador) y entra en una etapa de post-proceso donde está listo a recibir comandos para imprimir datos tecleados por el usuario.

AMPL le permite al usuario cambiar los valores de los elementos del modelo y formatear de diferentes formas los resultados que se obtienen al solucionar el problema particular; para una descripción detallada de estas posibilidades remitimos al lector a la referencia [?] en particular los capítulos 11-14.

19.4. Herramientas y Comandos

La notación matemática nos permite escribir de forma compacta la forma general, o modelo, de un problema de optimización utilizando notación algebraica para describir los objetivos y las restricciones que componen el problema.

Todo problema de optimización se puede describir utilizando los siguientes elementos matemáticos:

- **Conjuntos.**
- **Parámetros,** elementos conocidos y estáticos que forman parte del problema.
- **Variables,** cuyos valores deben ser determinados por el solucionador.
- **Objetivos,** funciones de los parámetros y las variables que deben ser minimizados o maximizados.
- **Restricciones** que deben ser satisfechas por la solución.

Por ejemplo, el problema de transporte (lineal) descrito en ?? se puede escribir en notación matemática de la siguiente forma:

Dados:	$ORIG,$	un conjunto de orígenes	
	$DEST,$	un conjunto de destinos	
	$s_i \geq 0,$	cantidad de bienes disponibles,	$i \in ORIG$
	$d_j \geq 0,$	demanda de bienes,	$j \in DEST$
	$c_{ij} > 0,$	costo de transporte de bienes,	$i \in ORIG$
			$j \in DEST$
Defina:	$T_{ij} \geq 0$	cantidad de prod. a transportar	$i \in ORIG$
			$j \in DEST$
Minimize:	$\sum_i \sum_j c_{ij} * T_{ij}$		
Sujeto a:	$\sum_j T_{ij} = s_i$	$\forall i \in ORIG,$	$j \in DEST$
	$\sum_i T_{ij} = d_j$	$\forall j \in DEST,$	$i \in ORIG$

Este modelo describe un número infinito de problemas de optimización relacionados. Si se proveen valores específicos para los elementos que se suponen conocidos el modelo se transforma en un problema específico. Cada conjunto diferente de datos define una situación única.

Un modelo matemático es, usualmente, la forma más compacta y clara de expresar un problema de optimización y además, una vez se tiene la formulación, la traducción a un lenguaje de programación se facilita.

El lenguaje de programación AMPL está diseñado para que sus comandos sean lo más parecido a una formulación matemática posible sin que sea necesario algo más que un teclado común. Existen construcciones en AMPL para definir todos los componentes básicos que se mencionaron anteriormente (conjuntos, parámetros, variables, objetivos y restricciones), además de formas para escribir expresiones aritméticas, sumas sobre conjuntos, etc.

19.4.1. Comandos de modelaje

Las declaraciones de los elementos del modelo tienen la siguiente forma común:

$$\textit{elemento nombre alias}_{opc} \textit{indexamientos}_{opc} \textit{cuerpo}_{opc};$$

donde *nombre* es un nombre alfanumérico que no ha sido asignado previamente a otra entidad por una declaración, *alias* es un literal opcional, *indexamientos* es una expresión opcional de indexamiento y *elemento* es una de las siguientes palabras claves

```
set
param
var
arc
minimize
maximize
subject to
node
```

El *elemento* puede ser omitido, en cuyo caso se asume `subject to`. El *cuerpo* de varias declaraciones consiste de otras frases, la mayoría opcionales, que siguen la parte inicial (condiciones, etc.). Toda declaración debe ser finalizada por un punto y coma.

Las declaraciones pueden aparecer en cualquier orden, salvo por la condición que cada nombre debe ser declarado antes de ser utilizado.

El conjunto, (`set`), es el componente fundamental de los modelos de AMPL. En general, los parámetros, variables y restricciones están indexados sobre algún conjunto y muchas expresiones contienen operaciones (usualmente sumas) sobre conjuntos. El indexamiento sobre conjuntos es lo que permite que un modelo conciso describa un programa matemático extenso.

AMPL ofrece una amplia variedad de tipos de conjuntos y operaciones. Los miembros de un conjunto pueden ser cadenas de caracteres o números, ordenados o desordenados; pueden aparecer como individuos, parejas ordenados, tripletes o tuplas más grandes. Los conjuntos se pueden definir listando sus miembros o computándolos explícitamente, utilizando operaciones como unión o intersección sobre otros conjuntos, o especificando operaciones matemáticas o lógicas arbitrarias como condiciones de pertenencia.

Cualquier componente de un modelo u operación iterativa se puede indexar sobre cualquier conjunto, utilizando una forma estándar de indexar expresiones.

Incluso los mismos conjuntos se pueden declarar en colecciones indexadas sobre otros conjuntos.

AMPL permite cuatro operaciones que definen un nuevo conjunto a partir de dos existentes:

```
A union B
A inter B
A diff B
A symdiff B
```

donde **union** define un nuevo conjunto con los elementos de **A** y **B**; **inter** retorna elementos que estén en **A** y **B**; **diff** los que están en **A** pero no en **B** y **symdiff** los que están en **A** o en **B** pero no en los dos. Para una descripción mas extensa y detallada de las posibilidades y operaciones sobre conjuntos referimos al lector a los capítulos 5 y 6 de [?].

Un modelo de optimización extenso utiliza, sin lugar a dudas, una gran cantidad de valores numéricos. Como se ha explicado previamente, en un modelo de AMPL, sólo es necesario hacer una descripción simbólica de estos y los valores específicos sólo tienen que aparecer en comandos separados de tipo *data*.

En AMPL un valor numérico que tenga nombre se llama un parámetro. Es posible declarar parámetros como escalares individuales pero la mayoría se definen indexados sobre vectores, matrices, o algún otro tipo de valores numéricos indexados sobre conjuntos.

Los parámetros y otros valores numéricos son los bloques con que se construyen las expresiones que definen las funciones objetivo y las restricciones de los modelos. Además de los operadores unitarios y binarios estándar de la notación algebraica AMPL provee operadores de iteración como **sum** y **prod** y un operador condicional (**if-then-else**) que escoge entre dos expresiones, dependiendo de la veracidad de una tercera.

Los parámetros están pensados para que representen valores numéricos pero también pueden representar cadenas de caracteres arbitrarios o valores lógicos.

Las variables de un modelo tienen mucho en común con los parámetros numéricos. Los dos son símbolos que representan números y que se pueden utilizar en expresiones aritméticas. Los valores de los parámetros son proveídos por el usuario mientras que los valores de las variables deben ser encontrados por el solucionador.

Las funciones objetivo consisten en una de las palabras clave **minimize** o **maximize**, un nombre, dos puntos y una expresión lineal o no sobre conjuntos previamente definidos, parámetros y variables.

Las restricciones se definen con la palabra clave **subject to**, un nombre, dos puntos y una expresión lineal o no sobre conjuntos previamente definidos, parámetros y variables. Estas se pueden definir como colecciones indexadas sobre un conjunto.

Para mayor profundidad en las definiciones de variables y restricciones vea el capítulo 8 de [?].

Estilo usual	Estilo alternativo	Tipo de operandos	Tipo de resultado
<code>if-then-else</code>		lógico, aritmético	aritmético
<code>or</code>	<code> </code>	lógico	lógico
<code>exists forall</code>		lógico	lógico
<code>and</code>	<code>&&</code>	lógico	lógico
<code>not</code>	<code>!</code>	lógico	lógico
<code><<==<>>==</code>	<code><<==!>==</code>	aritmético	lógico
<code>in not in</code>		objeto, conjunto	lógico
<code>+ - less</code>		aritmético	aritmético
<code>sum prod min max</code>		aritmético	aritmético
<code>* / div mod</code>		aritmético	aritmético
<code>+ - (unario)</code>		aritmético	aritmético
<code>^</code>	<code>**</code>	aritmético	aritmético

Cuadro 19.2: Operadores lógicos y aritméticos en orden de precedencia.

19.4.2. Expresiones matemáticas y lógicas

Las expresiones matemáticas de AMPL son muy parecidas a las de otros lenguajes de programación. Los números literales consisten de un signo opcional seguido por una secuencia de dígitos, que puede o no incluir un punto decimal. Al final de un número literal puede haber un exponente, formado por la letra `d`, `D`, `e` o `E` y un signo opcional seguido por dígitos (7.6639D-07).

Los literales, parámetros y variables pueden ser combinados en expresiones utilizando los operadores estándar de adición (+), resta (-), multiplicación (*), división (/) y exponenciación (^). Las convenciones comunes de aritmética aplican. El cuadro ?? muestra los operadores lógicos y matemáticos que maneja AMPL con diferentes sintaxis correctas para su utilización.

Otra forma de construir expresiones aritméticas es aplicando funciones a otras expresiones. Una referencia a función consiste de un nombre seguido por un argumento en paréntesis o una lista de argumentos separados por comas; cualquier expresión aritmética puede ser argumento de una función.

El cuadro ?? lista las funciones predefinidas que se encuentran típicamente en modelos. Adicionalmente AMPL provee funciones de redondeo y una variedad amplia de funciones que generan números aleatorios. También existe la posibilidad de importar funciones definidas por el usuario.

Finalmente, AMPL permite utilizar operadores (lógicos y matemáticos) y funciones en la definición de conjuntos, parámetros y variables. Los operadores iterativos pueden operar sobre cualquier tipo de conjunto.

19.4.3. Formato de datos

AMPL distingue dos ambientes distintos dentro de sintaxis, el de modelaje y el de datos. Las secciones anteriores trataron algunos aspectos del modelaje,

<code>abs(x)</code>	valor absoluto, $ x $
<code>acos(x)</code>	coseno inverso, $\cos^{-1}(x)$
<code>acosh(x)</code>	coseno hiperbólico inverso, $\cosh^{-1}(x)$
<code>asin(x)</code>	seno inverso, $\sin^{-1}(x)$
<code>asinh(x)</code>	seno hiperbólico inverso, $\sinh^{-1}(x)$
<code>atan(x)</code>	tangente inversa, $\tan^{-1}(x)$
<code>atanh(x)</code>	tangente hiperbólica inversa, $\tanh^{-1}(x)$
<code>cos(x)</code>	coseno, $\cos(x)$
<code>cosh(x)</code>	coseno hiperbólico, $\cosh(x)$
<code>exp(x)</code>	exponencial, e^x
<code>log(x)</code>	logaritmo natural, $\ln(x)$
<code>log10(x)</code>	logaritmo base 10, $\ln_{10}(x)$
<code>max(x₁, x₂, ...)</code>	máximo (2 o más argumentos)
<code>min(x₁, x₂, ...)</code>	mínimo (2 o más argumentos)
<code>sin(x)</code>	seno, $\sin(x)$
<code>sinh(x)</code>	seno hiperbólico, $\sinh(x)$
<code>sqrt(x)</code>	raíz cuadrada, \sqrt{x}
<code>tan(x)</code>	tangente, $\tan(x)$
<code>tanh(x)</code>	tangente hiperbólica, $\tanh(x)$

Cuadro 19.3: Funciones aritméticas incluidas en AMPL.

sintaxis y funciones matemáticas. El objetivo de esta sección es presentar, de una forma introductoria, las posibilidades que ofrece AMPL para leer datos de archivos externos y los formatos que este reconoce.

AMPL puede obtener datos de archivos con una sintaxis fácil de manejar en un editor de texto cualquiera y de archivos generados por bases de datos o hojas de cálculo. El comando `display` permite obtener, en pantalla, o exportar, a un archivo, los resultados enviados por el solucionador en diferentes formatos reconocidos por AMPL y otros programas.

AMPL lee definiciones de datos en un modo *data* que se inicia con el comando `data`. La forma más común de utilización de este comando consiste en la palabra clave `data` seguida por el nombre de un archivo. Por ejemplo para leer datos de un archivo llamado `assign.dat`:

```
ampl: data assign.dat;
```

Mientras que esté leyendo en modo *data*, AMPL trata los espacios consecutivos, tabuladores y cambios de línea como un solo espacio. Las comas que separan cadenas o números también son ignoradas. Esta característica ayuda a mantener los archivos de datos en una forma legible. Al finalizar la lectura de datos AMPL retorna al modo en el que estaba previamente.

Para un parámetro sin indexamiento (escalar), el comando de datos asigna un valor:

```
param supply := 0.8;
```

Para parámetros indexados sobre un conjunto uni-dimensional como

```
set ORIG; # origins
param supply {ORIG} >= 0;
```

la especificación del conjunto puede ser simplemente un listado de sus miembros:

```
set ORIG := Coullard Hazen Hopp Hurter;
```

y la especificación del parámetro puede ser parecida excepto por la adición de un valor después de cada miembro del conjunto:

```
param supply := Coullard 1 Hazen 0 Hopp 0 Hurter 1;
```

note que gracias a que AMPL ignora espacios consecutivos, tabuladores y cambios de línea, la especificación se habría podido escribir como:

```
param supply :=
    Coullard 1
    Hazen    0
    Hopp     0
    Hurter   1;
```

El formateo de datos de parámetros de dos dimensiones (indexados sobre dos conjuntos) tiene una sintaxis parecida a las de una dimensión pero con cada miembro del conjunto identificado con un par de objetos. La generalización a más de dos dimensiones sigue el mismo tipo de sintaxis. Sin embargo AMPL también reconoce un formato de tipo tabla para este tipo de parámetros, por ejemplo los valores para las siguientes definiciones (note que *cost* es un parámetro bidimensional):

```
set ORIG;
```

```
set DEST;
param cost {ORIG, DEST} >= 0;
```

se puede especificar como

```
set ORIG := Coullard Hazen ;
set DEST := 1021 1049 1053 ;
param cost:
    1021  1049  1053  :=
    Coullard    6    9    8
    Hazen       11   8    7 ;
```

Además de permitir definir valores específicos AMPL permite definir valores por defecto para escalares o parámetros en una o más dimensiones. La sintaxis para utilizar esta posibilidad es:

```
param nombre_parámetro default valor_por_defecto ;
```

donde *valor_por_defecto* es un número.

AMPL también permite extraer datos de archivos propios de manejadores de bases de datos o hojas de cálculo. Para la descripción detallada de los comandos necesarios referimos al lector a [?], capítulos 8-10.

19.5. Ejemplos

El objetivo de esta sección es mostrar ejemplos donde se ponen en práctica la sintaxis y los comandos descritos en las secciones anteriores. Como se ha

mencionado en ?? AMPL se vale de solucionadores para obtener las soluciones de los modelos para los datos particulares que se estén trabajando.

19.5.1. Problema de Transporte

El problema de transporte es un ejemplo común de optimización donde una serie de bienes se deben transportar de varios orígenes a varios destinos de forma tal que el costo del transporte de los bienes sea mínimo. Este es uno de los ejemplos más conocidos de problemas donde se quiere minimizar el costo de algún tipo de flujo.

El problema particular que se trata en [?] consiste en transportar un bien de un conjunto de orígenes a otro. El costo de llevar el bien de un origen cualquiera a un destino cualquiera es conocido. Además hay un índice que indica la cantidad del producto en los orígenes y otro relacionado con la demanda en los destinos.

La función a minimizar depende de los costos de transporte y de las cantidades a transportar entre orígenes y destinos.

A esta función de coste se le imponen restricciones que aseguren el cumplimiento de ciertas ecuaciones que se deben cumplir.

Ejemplo: caso lineal

En este caso la función de coste es la multiplicación de la cantidad de producto a transportar de cada origen a cada destino y el costo de transportarlo. Las cantidades que se desean encontrar son las cantidades a transportar de orígenes a destinos.

El modelo tiene dos restricciones: una para asegurarse que la cantidad de producto que llega a un destino sea igual a la demanda y otra que asegure que la totalidad de producto que sale de un origen no exceda la cantidad disponible. Las restricciones también son lineales.

A continuación presentamos el archivo del modelo lineal para el problema de transporte *transp.mod*:

```

set ORIG; # origins
set DEST; # destinations
set LINKS within {ORIG,DEST};
param supply {ORIG} >= 0; # amounts available at origins
param demand {DEST} >= 0;
# amounts required at destinations
check: sum {i in ORIG}
      supply[i] = sum {j in DEST} demand[j];
param cost {LINKS} >= 0; # shipment costs per unit
var Trans {LINKS} >= 0; # actual units to be shipped
minimize total.cost:
  sum {i,j in LINKS} cost[i,j] * Trans[i,j];
subject to Supply {i in ORIG}:
  sum (i,j) in LINKS Trans[i,j] = supply[i];
subject to Demand {j in DEST}:

```

76CAPÍTULO 19. SOFTWARE DISPONIBLE PARA PROGRAMACIÓN LINEAL

```
sum {i,j in LINKS} Trans[i,j] = demand[j];
```

El archivo correspondiente de datos, *assign.dat*:

```
set ORIG := Coullard Hazen Hopp Hurter Jones
           Mehrotra Rieders Spearman Sun Tamhane Zazanis ;
set DEST := 1021 1049 1053 1055 1083 1087 ;
param supply default 1 ;
param demand default 1 ;
param cost:
           1021  1049  1053  1055  1083  1087  :=
Coullard   6    9    8    7    11   10
Hazen     11    8    7    6    9    10
Hopp      9    10   11    1    5    6
Hurter    11    9    8   10    6    5
Jones     3     2    8    9   10   11
Mehrotra  11    9   10    5    3    4
Rieders   6    11   10    9    8    7
Spearman  11    5    4    6    7    8
Sun       11    9   10    8    6    5
Tamhane   5     6    9    8    4    3
Zazanis   11    9    8    4    6    5  ;
```

Capítulo 20

Programas lineales clásicos

FALTA

Capítulo 21

Métodos de punto interior para programación lineal

FALTA

Parte III

Funciones Convexas y Programación No Lineal

Capítulo 22

Funciones convexas, caracterización y propiedades

Dado un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (22.1)$$

$\forall x, y \in A$ y $\forall t \in (0, 1)$. Cuando la desigualdad en (22.1) es estricta decimos que f es estrictamente convexa. Si en (22.1) cambiamos el sentido de la desigualdad, obtenemos la definición de función cóncava y estrictamente cóncava, según la desigualdad sea débil o estricta. El lector deberá notar que la mayor parte de las ideas presentadas en los apartados siguientes aplican por igual a funciones cóncavas, cuando cambiamos el sentido a la desigualdad. No insistiremos en ello cada vez.

Desigualdad de Jensen: Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexa si y solo si

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a^i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a^i)$$

para cada combinación convexa $\sum_{i=1}^n \lambda_i a^i$ formada por puntos de A . El lector debe proporcionar la demostración rigurosa de esta afirmación.

Como ejemplos inmediatos de funciones convexas podemos presentar los siguientes ejemplos:

1. La función *gauge* de A cuando $0 \in \text{int}(A)$.
2. Las funciones naturales dadas por las normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ y en general cualquier norma.

3. Las funciones afines.

El lector debe comprobar rigurosamente que los ejemplos dados son efectivamente ejemplos de funciones convexas en \mathbb{R}^n .

Para obtener funciones convexas podemos emplear cualquiera de los procedimientos sugeridos en los siguientes resultados:

Proposición: 22.0.1. Si g_1, \dots, g_k son funciones convexas definidas en un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, c_1, \dots, c_k son escalares positivos, entonces $g = c_1g_1 + \dots + c_kg_k$ es una función convexa.

Proposición: 22.0.2. Sea $\{g_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de funciones convexas definidas en un mismo conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces la función

$$g(x) = \sup_{\alpha \in I} g_\alpha(x)$$

es una función convexa en A , siempre que g sea una función finita (tome valores finitos).

Nota: Cuando $g : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ admite valores en el sistema de los reales extendidos diremos que g es convexa si cumple con la definición dada en (??). Por lo tanto:

$$a = \{x \in A / g(x) < \infty\}$$

es un conjunto convexo:

$$x, x' \in a : g(x) < \infty; g(x') < \infty$$

luego

$$g(tx + (1-t)x') \leq tg(x) + (1-t)g(x') < \infty$$

entonces $tx + (1-t)x' \in a$.

Proposición: 22.0.3. Cuando $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, los conjuntos:

$$A_r = \{x \in A / f(x) \leq r\}$$

son conjuntos convexos.

Proposición: 22.0.4. Atendiendo a la nota anterior, si $\{g_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de funciones convexas en un conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$g(x) = \sup_{\alpha} g_\alpha(x)$$

es una función convexa en el sistema real extendido.

El conjunto $a = \{x \in A / g(x) < \infty\}$ es un conjunto convexo que corresponde a los puntos $x \in A$ donde los valores $\{g_\alpha(x) : \alpha \in I\}$ están acotados superiormente.

Veremos que g es convexa:

$$g_\alpha(tx + (1-t)y) \leq tg_\alpha(x) + (1-t)g_\alpha(y)$$

cuando $t \in (0, 1)$, $x, y \in A$. De manera que:

$$\sup_\alpha g_\alpha(tx + (1-t)y) \leq \sup_\alpha (tg_\alpha(x) + (1-t)g_\alpha(y))$$

luego

$$\sup_\alpha g_\alpha(tx + (1-t)y) \leq \sup_\alpha tg_\alpha(x) + (1-t) \sup_\alpha g_\alpha(y)$$

luego

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$$

donde aceptamos los valores ∞ para g .

Proposición: 22.0.5. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, entonces $f \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa.

Proposición: 22.0.6. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa no decreciente, entonces $\varphi \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa.

Proposición: 22.0.7. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si su restricción a cualquier recta es una función convexa, es decir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si $\varphi(t) = f(x + ty)$ para $t \in \mathbb{R}$ es convexa de \mathbb{R} en \mathbb{R} para cualquier elección de x e y en \mathbb{R}^n .

22.1. Epígrafe de una función

Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos su epígrafe como el conjunto

$$\text{Epi}(f) = \{(x; t) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in A; f(x) \leq t\}.$$

Hacemos notar que $\text{Epi}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y que la gráfica de f parte de la frontera del Epígrafe de f :

$$\text{Graph}(f) = \{(x; f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in A\} \subseteq \text{Frontera}(\text{Epi}(f)).$$

Basta notar que $(x; f(x)) \in \text{Epi}(f)$ pero $(x; f(x) - \epsilon) \notin \text{Epi}(f)$ para $\epsilon > 0$ arbitrario. Es evidente el sentido del prefijo *epi* en esta definición el cual nos debe llevar de manera natural a la definición de hipógrafe de una función.

La mayor utilidad del concepto de epígrafe de una función es que nos permite emplear los conceptos de convexidad estudiados para conjuntos para la mejor comprensión y análisis de la convexidad de funciones. En particular podemos dar una caracterización de la convexidad de una función en términos de la convexidad de su epígrafe:

Proposición: 22.1.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solo si su epígrafe es convexo.*

Demostración: Supongamos que $\text{Epi}(f)$ es un conjunto convexo; dados $x, y \in A$ con $t \in (0, 1)$ vemos que $t(x; f(x)) + (1-t)(y; f(y)) \in \text{Epi}(f)$ porque $(x; f(x)), (y; f(y)) \in \text{Graph}(f) \subseteq \text{Epi}(f)$. Por definición

$$(tx + (1-t)y; tf(x) + (1-t)f(y)) \in \text{Epi}(f)$$

luego

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

entonces f es una función convexa porque $x, y \in A$ con $t \in (0, 1)$ son todos arbitrarios. Recíprocamente, supongamos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces si $(x; t); (y; j) \in \text{Epi}(f)$ con $\lambda \in (0, 1)$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq t \\ f(y) &\leq j \\ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) &\leq \lambda t + (1-\lambda)j \end{aligned}$$

como f es convexa:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda t + (1-\lambda)j$$

entonces:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y; \lambda t + (1-\lambda)j) = \lambda(x; t) + (1-\lambda)(y; j) \in \text{Epi}(f)$$

luego $\text{Epi}(f)$ es convexo.

Veremos una aplicación útil de este resultado. Sabemos que las funciones lineales afines son cóncavas y convexas a la vez, mostraremos que ellas son las únicas funciones con esta propiedad.

Proposición: 22.1.2. *$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava y convexa, entonces φ es lineal afín.*

Demostración: Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava y convexa. Dado un punto $(a, f(a))$ en la gráfica de f , sabemos que $(a, f(a))$ es un punto frontera del $\text{Epi}(f)$ y de $\text{Hipo}(f)$ los cuales son convexos porque f es cóncava y convexa a la vez. Sea H el hiperplano de soporte de $\text{Epi}(f)$ en el punto $(a, f(a))$ y sea K el hiperplano de soporte de $\text{Hipo}(f)$ en el mismo punto. Podemos representar a H y a K como:

$$\begin{aligned} H &= \text{graph}(l) \\ K &= \text{graph}(r) \end{aligned}$$

donde l, r son funciones afines en \mathbb{R}^n . Como H es hiperplano de soporte para $\text{Epi}(f)$, tenemos que $\text{Epi}(f) \subseteq H^+ = \text{Epi}(l)$, entonces $(x; f(x)) \in \text{Epi}(l) \forall x \in \mathbb{R}^n$, con lo cual $l(x) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Análogamente, K es hiperplano de soporte de $\text{Hipo}(f)$ entonces $\text{Hipo}(f) \subseteq H^- = \text{Hipo}(r)$, así que $(x; f(x)) \in \text{Hipo}(r) \forall x \in \mathbb{R}^n$, de donde $f(x) \leq r(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$, vemos así que $l(x) \leq r(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$, pero $r - l$ es afín, entonces $r - l = \text{constante}$, como $(a, f(a)) \in H \cap K$, entonces $r(a) = f(a) = l(a)$, así que $r - l = 0$. Por lo tanto $r = l$ en \mathbb{R}^n y así $H = K$. Esto significa que $\text{Epi}(f) \subseteq H^+ = \text{Epi}(l)$ y que $\text{Hipo}(f) \subseteq H^- = \text{Hipo}(l)$, así que

$$(x; f(x)) \in \text{Epi}(l) \cap \text{Hipo}(l) = \text{graph}(l)$$

luego $l(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$, así que f es una función lineal afín.

22.2. Continuidad de funciones convexas

Como preámbulo al siguiente resultado acerca de funciones convexas, el cual muestra que en general las funciones convexas son continuas, debemos recordar algunos elementos de topología en espacios euclidianos. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto a si $|f(a) - f(x)|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño cuando $x \rightarrow a$, es decir cuando $\|x - a\|_2 \rightarrow 0$. Debemos señalar que esta situación es completamente independiente del tipo de norma empleada porque todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes. Por ejemplo si tomamos la norma euclidiana:

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

y la norma del máximo

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

encontramos fácilmente que:

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &\leq n \|x\|_\infty^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty^2 &\leq \frac{1}{n} \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 &\leq \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 &\leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \end{aligned}$$

lo cual muestra que la convergencia $x \rightarrow a$ tiene lugar bajo ambas normas de manera equivalente: $\|x - a\|_\infty \rightarrow 0$ si y solo si $\|x - a\|_2 \rightarrow 0$.

Desde un punto de vista topológico, es interesante notar que los sistemas de vecindades que generan ambas normas son también equivalentes:

$$\begin{aligned} V_r(a) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\|_\infty \leq r\} \\ B_r(a) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\|_2 \leq r\} \end{aligned}$$

son conjuntos convexos tales que:

$$V_r(a) \subseteq B_{\sqrt{nr}}(a) \quad \text{porque} \quad \frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_\infty B_r(a) \subseteq V_r(a) \quad \text{porque} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

entonces $B_r(a) \subseteq V_r(a) \subseteq B_{\sqrt{nr}}(a) \quad \forall r > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$.

En el caso $n = 2$ tenemos el diagrama de la figura ?? para $B_r(\circ) \subseteq V_r(\circ) \subseteq B_{\sqrt{2}r}(\circ)$.

Figura 22.1: Diagrama de $B_r(0) \subseteq V_r(0) \subseteq B_{\sqrt{2}r}(0)$ para $n = 2$.

Análogamente, $V_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(a) \subseteq B_r(a) \subseteq V_r(a)$ porque $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ y en el caso $n = 2$ tenemos el diagrama de la figura ??.

Esto muestra un caso particular de equivalencia entre dos normas específicas para el espacio euclidiano \mathbb{R}^n . El lector debe probar el siguiente resultado general de la topología:

Teorema 22.2.1. *Dos normas cualquiera en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, es decir si X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ son normas para X , entonces existen constantes positivas α, β tales que*

$$\alpha\|x_1\|_1 \leq \|x_2\|_2 \leq \beta\|x_1\|_1 \quad \forall x \in X$$

Procedemos a presentar el resultado de nuestro interés.

Teorema 22.2.2. *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa entonces f es una función continua.*

Corolario: 22.2.1. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces f es continua en el interior de A .*

Figura 22.2: Diagrama de $V_{\frac{r}{\sqrt{n}}}(0) \subseteq B_r(0) \subseteq V_r(0)$ para $n = 2$.

Corolario: 22.2.2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, cuando a es un punto de A en el cual f no es continua, entonces a pertenece a la frontera de A .

Daremos la prueba del teorema y dejaremos la verificación de los corolarios al lector. Sin pérdida de generalidad mostraremos que f es continua en el punto 0. Es fácil ver que una vecindad $V_r(0)$ es un hipercubo de radio r centrado en el origen de \mathbb{R}^n . Por las propiedades generales de las normas veremos que $V_r(0)$ es cerrado, convexo y acotado. Por lo tanto $V_r(0)$ es un conjunto convexo y compacto. Empleando los resultados conocidos de análisis convexo y topología sabemos que $V_r(0)$ se puede describir como la clausura convexa de sus puntos extremos:

$$V_r(0) = \text{co}(\text{ext}(V_r(0))).$$

Como $V_r(0)$ es un hipercubo, es un tipo particular de poliedro acotado (politopo), por lo cual sus puntos extremos son precisamente sus vértices:

$$V_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -r \leq x_i \leq r; \forall i = 1, \dots, n\}.$$

El conjunto explícito de desigualdades lineales que lo define es:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & r \\ -x_1 & \leq & r \\ x_2 & \leq & r \\ -x_2 & \leq & r \\ & \vdots & \\ x_n & \leq & r \\ -x_n & \leq & r \end{array}$$

el cual está definido por $2n$ desigualdades listadas en parejas linealmente dependientes, con la particularidad evidente que cualquier selección de n desigualdades, tomando n miembros con uno de cada pareja conduce a una colección de n desigualdades linealmente independientes cuyo rango, al expresarlas en forma de sistema de ecuaciones será siempre n . Es evidente que cualquier selección de n desigualdades linealmente independientes debe hacerse siempre de esta forma. Esto demuestra que $V_r(0)$ tiene exactamente 2^n vértices como podríamos haber concluido al estudiar el hipercubo $V_r(0)$ por otros métodos. El lector debería proponer su propia solución a este problema. Los 2^n vértices del hipercubo $V_r(0)$ los podemos describir explícitamente como: $\sum_{i=1}^{2^n} p_i e^i$ donde e^1, \dots, e^n es la base natural para \mathbb{R}^n y $p = (p_1, \dots, p_n)$ es un vector en \mathbb{R}^n que tan solo admite los valores ± 1 en sus componentes. Para efectos de claridad representaremos estos vértices como v^1, \dots, v^{2^n} y así tenemos que

$$\begin{aligned} V_r(0) &= \text{co}\{rv^1, \dots, rv^{2^n}\} \\ &= r \text{co}\{v^1, \dots, v^{2^n}\} \end{aligned}$$

cuando $\|x\|_\infty \leq r$, tenemos que $x \in V_r(0)$, entonces $x = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i rv^i$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_{2^n} \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_{2^n} = 1$, puesto que f es convexa tenemos:

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i f(rv^i)$$

cuando $r < 1$ tenemos:

$$f(rv^i) \leq rf(v^i) + (1-r)f(0) \quad \forall i = 1, \dots, 2^n$$

de donde:

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i \{rf(v^i) + (1-r)f(0)\}$$

así que

$$f(x) - f(0) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i r \{f(v^i) - f(0)\}$$

porque $\sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i = 1$, con lo cual

$$f(x) - f(0) \leq r \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i w_i \leq rm$$

donde $m = \max_{1 \leq i \leq 2^n} w_i$ con $w_i = f(v^i) - f(0)$. Tenemos pues que $f(x) - f(0) \leq rm$ si $\|x\|_\infty \leq r$. Utilizando la simetría de la figura ?? podemos describir 0 como $0 = \frac{1}{2}(x) + \frac{1}{2}(-x)$ y f es convexa, tenemos:

$$f(0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x)$$

Figura 22.3: $0 = \frac{1}{2}(x) + \frac{1}{2}(-x)$

de donde

$$2f(0) \leq f(x) + f(-x).$$

Por otra parte $\| -x \|_\infty = \|x\|_\infty \leq r$, entonces $f(-x) - f(0) \leq rm$ así que

$$f(0) - f(x) \leq f(-x) - f(0) \leq rm,$$

lo cual nos permite afirmar que:

$$|f(0) - f(x)| \leq rm$$

siempre que $\|x\|_\infty \leq r$. Esto prueba la continuidad de f en el punto 0.

22.3. Convexidad bajo supuestos de diferenciabilidad

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 es convexa si y sólo si

$$f(x) - f(y) \geq \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) \quad \forall x, y \in A. \quad (22.2)$$

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa si y sólo si la desigualdad (??) es estricta para todo $x, y \in A$.

Demostraremos estos resultados empleando elementos de cálculo diferencial y análisis convexo. Supongamos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y de clase C^1

tomando $h \in (0, 1)$ encontramos

$$\begin{aligned} f(y + h(x - y)) &= f((1 - h)y + hx) \\ &= (1 - h)f(y) + hf(x) \\ f(y + h(x - y)) - f(y) &= h(f(x) - f(y)) \\ \frac{f(y + h(x - y)) - f(y)}{h} &= f(x) - f(y) \end{aligned}$$

tomando $h \rightarrow 0$ encontramos a la izquierda la derivada direccional de f en el punto x en la dirección $x - y$, así que

$$\vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) \leq f(x) - f(y).$$

Ahora veremos que si $f(x) - f(y) \geq \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) \forall x, y \in A$, entonces f es convexa: Tomamos $t \in (0, 1)$, $x, y \in A$ arbitrarios y definimos $z = tx + (1 - t)y$ como un punto genérico en el interior del segmento de recta que une x con y . Vemos que

$$\begin{aligned} x - z &= (1 - t)(x - y) \\ y - z &= t(y - x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando la hipótesis:

$$\begin{aligned} f(x) - f(z) &\geq \vec{\nabla} f(z) \cdot (x - z) = (1 - t)\vec{\nabla} f(z) \cdot (x - y) \\ f(y) - f(z) &\geq \vec{\nabla} f(z) \cdot (y - z) = t\vec{\nabla} f(z) \cdot (y - x) \end{aligned}$$

de donde

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \geq f(z) = f(tx + (1 - t)y)$$

como esperamos para que f sea convexa.

Si $f(x) - f(y) > \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) \forall x \neq y \in A$, repetimos el argumento anterior y encontramos que

$$tf(x) + (1 - t)f(y) > f(tx + (1 - t)y)$$

cuando $x \neq y$, $t \in (0, 1)$, lo que prueba que f es estrictamente convexa. Supongamos que f es estrictamente convexa en A , también supongamos que $f(x) - f(y) = \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y)$ con $x \neq y$ en A . Dado $t \in (0, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y) &< tf(x) + (1 - t)f(y) \\ &= f(y) + t(f(x) - f(y)) \\ &= f(y) + t\vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y). \end{aligned}$$

Pero como f es convexa y C^1 tenemos que $f(tx + (1 - t)y) - f(y) \geq \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y)$ así que llegamos a una contradicción.

Cuando $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y abierto, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , tenemos que f es convexa si y sólo si su matriz Hessiana $Hf(a)$ es

semidefinida positiva en cada punto $a \in A$. Empleando la fórmula de Taylor tenemos:

$$f(x) - f(y) - \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) = \frac{1}{2}(x - y)^t Hf(y + \theta(x - y))(x - y) \geq 0$$

siempre que $Hf(a)$ sea semidefinida positiva en A , dado que $\theta \in (0, 1)$. Como f es C^2 , en particular es C^1 , lo cual muestra que f es convexa porque $f(x) - f(y) \geq \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) \forall x, y \in A$. Este último argumento justifica que f es estrictamente convexa cuando su matriz Hessiana es definida positiva en A .

Supongamos que f es convexa en A , entonces $f(x) - f(y) \geq \vec{\nabla} f(y) \cdot (x - y) \forall x, y \in A$, debido a que f es C^2 y en particular C^1 . Tomamos $a \in A$ y mostraremos que la matriz Hessiana $Hf(a)$ es semidefinida positiva. Dado $z \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ $a + hz \in A$ cuando $h > 0$ es suficientemente pequeño, con la fórmula de Taylor encontramos:

$$f(a + hz) - f(a) = \vec{\nabla} f(a) \cdot hz + \frac{1}{2}h^2 z^t Hf(a + \theta hz) z$$

y por la hipótesis de convexidad tenemos:

$$z^t Hf(a + \theta hz) z \geq 0 \quad \theta \in (0, 1) \quad (22.3)$$

y $h > 0$ arbitrario. Por la continuidad de las segundas derivadas parciales de f , si $z^t Hf(a) z < 0$ podríamos encontrar un $h > 0$ lo suficientemente pequeño para que $z^t Hf(a + \theta hz) z < 0 \forall \theta \in (0, 1)$ así que esto contradiría el resultado (??), por lo tanto $z^t Hf(a) z \geq 0$. Como z es arbitrario en $\mathbb{R}^n / \{0\}$, concluimos que $Hf(a)$ es semidefinida positiva.

Observamos que cuando f es estrictamente convexa y de clase C^2 no es necesariamente cierto que la matriz Hessiana $Hf(a)$ sea definida positiva en todo a . El lector debería ilustrar esta observación con un ejemplo.

Aplicando estos resultados podemos encontrar nuevos ejemplos de funciones convexas:

1. Exponencial:

$x \rightarrow e^{kx}$ es estrictamente convexa en \mathbb{R} si $k \neq 0$.

2. Potencias:

$x \rightarrow x^\alpha$ es estrictamente convexa en $x > 0$ cuando $\alpha < 0$ y cuando $\alpha > 1$.

$x \rightarrow x^\alpha$ es estrictamente cóncava en $x > 0$ cuando $\alpha \in (0, 1)$.

3. Formas Cuadráticas: Dada una matriz definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la forma cuadrática $x^t Ax$ define una función estrictamente convexa en \mathbb{R}^n .

4. Funciones Cuadráticas: Una función cuadrática $x^t Ax + b \cdot x + \gamma$ es convexa en \mathbb{R}^n si y sólo si A es semidefinida positiva.

5. Logaritmo:

La función $x \rightarrow \log(x)$ es estrictamente cóncava en $x > 0$.

6. $x \rightarrow |x|^p$ con $p \geq 1$ es una función convexa en \mathbb{R} .

22.4. Resultados básicos para funciones convexas

Presentaremos algunos resultados de importancia en programación no lineal que involucran funciones convexas.

Proposición: 22.4.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, f_1, \dots, f_m funciones convexas definidas en A y h_1, \dots, h_k funciones afines definidas en A . Si no existe un punto $x \in A$ tal que $f_i(x) < 0 \forall i = 1, \dots, m$ y $h_j(x) = 0 \forall j = 1, \dots, k$, entonces existen vectores $p \in \mathbb{R}^m$, $q \in \mathbb{R}^k$ tales que $p \geq 0$; p y q no son simultáneamente nulos y cumplen:*

$$p \cdot f(x) + q \cdot h(x) \geq 0$$

para cada $x \in A$.

La demostración de este resultado es una interesante aplicación de los teoremas de separación en análisis convexo.

Demostración: Definiremos el conjunto \mathcal{C} en \mathbb{R}^{m+k} como aquellos puntos $(y; z) \in \mathbb{R}^{m+k}$ con la propiedad de que existe un $x \in A$ tal que:

$$y > f(x); \quad z = h(x).$$

Vemos que \mathcal{C} es un conjunto convexo: cuando $(y; z), (y'; z') \in \mathcal{C}$, entonces existen $x, x' \in A$ tales que

$$y > f(x), y' > f(x'), \quad z = h(x), z' = h(x'),$$

si $t \in (0, 1)$ encontramos que;

$$\begin{aligned} ty + (1-t)y' &> tf(x) + (1-t)f(x') \geq f(tx + (1-t)x') \\ tz + (1-t)z' &> th(x) + (1-t)h(x') \geq h(tx + (1-t)x') \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la convexidad de las componentes de f y la afinidad en las componentes de h . Aquí tenemos $f = (f_1, \dots, f_m)$; $h = (h_1, \dots, h_k)$. Esto comprueba que $t(y; z) + (1-t)(y'; z') \in \mathcal{C}$, lo cual demuestra que \mathcal{C} es convexo. Hemos supuesto que no hay ningún $x \in A$ tal que $f(x) < 0$ y $h(x) = 0$, lo cual significa que 0_{m+k} en \mathbb{R}^{m+k} no pertenece al conjunto convexo $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$. Por el teorema débil de separación, sabemos que existe un vector $(p; q) \in \mathbb{R}^{m+k} / \{0_{m+k}\}$ tal que

$$p \cdot y + q \cdot z \geq 0 \quad \forall (y; z) \in \mathcal{C}.$$

Es evidente que $(y'; z) \in \mathcal{C}$ siempre que $(y; z) \in \mathcal{C}$ y $y' \geq y$. Así que podemos tomar y' arbitrariamente grande y siempre debe cumplir $p \cdot y' + q \cdot z \geq 0$. Esto implica que $p \geq 0$, por que de lo contrario no podría ser cierto que $p \cdot y' + q \cdot z \geq 0$ para $y' \geq y$ arbitrario. Por otra parte, dado $x \in A$ fijo y $\varsigma > 0$ arbitrario podemos

definir y^ς como $y_i^\varsigma = f_i(x) + \varsigma \forall i = 1, \dots, m$, de manera que $(y^\varsigma, z) \in \mathcal{C}$, $\forall \varsigma > 0$ donde $z = h(x)$. Por lo tanto

$$p \cdot y^\varsigma + q \cdot z = p \cdot f(x) + p^\varsigma + q \cdot h(x) \geq 0$$

donde $p^\varsigma = \varsigma \sum_{i=1}^m p_i$, como $\varsigma > 0$ es arbitrario, tenemos:

$$p \cdot f(x) + q \cdot h(x) \geq 0 \quad \forall x \in A.$$

Como consecuencia de este resultado encontramos un importante teorema de programación matemática:

Corolario: 22.4.1. (TEOREMA DE GORDAN)

Sea $A \in \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y f_1, \dots, f_m funciones convexas definidas en A , entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. Existe un $x \in A$ tal que $f_i(x) < 0 \forall i = 1, \dots, m$.
2. Existe un vector $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p \geq 0$ y $p \cdot f(x) \geq 0 \forall x \in A$.

La utilidad de este resultado se pondrá de manifiesto más adelante.

22.4.1. Casos especiales

Dedicaremos un espacio a mostrar la convexidad de unas funciones particulares de nuestro interés:

1. $f(x) = \log(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ convexa en \mathbb{R}^n
2. La media geométrica $f(x) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$ es cóncava en \mathbb{R}_{++}^n .
3. $f(x) = \log \det x$ es cóncava en el espacio de las matrices simétricas definidas positivas S_{++}^n .

22.5. Convexidad y optimización

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. No es difícil ver que los mínimos locales de f en A son mínimos globales: sea a un mínimo local de f en A : existe $\varsigma > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$ cuando $x \in A$ con $\|x - a\| < \varsigma$. Dado $y \in A$ tenemos:

$$f(a) \leq f(ta + (1-t)y) \leq tf(a) + (1-t)f(y)$$

eligiendo un t apropiado para que

$$\|ta + (1-t)y - a\| = (1-t)\|y - a\| < \varsigma$$

$t \in (0, 1)$, entonces $f(a) \leq f(y)$ así que $f(a)$ es mínimo global de f en A .

Es importante ver que el conjunto de mínimos (globales) de f en A es un conjunto convexo, basta definir

$$A_m = \{x \in A : f(x) \leq m\}.$$

donde $m = \min_{x \in A} f(x)$.

Finalmente mostraremos de una forma muy simple que el mínimo de una función cóncava en un conjunto convexo y compacto se obtiene en uno de sus puntos extremos. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y convexo, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava, entonces es continua y existe un punto $a \in A$ tal que $f(a) = \min_{x \in A} f(x)$.

Como A es convexo y compacto, A se puede expresar como la clausura convexa de sus puntos extremos: $A = \text{co}(\text{ext}(A))$ por lo tanto $a = \sum_{i=1}^N \lambda_i a^i$ donde a^1, \dots, a^N son puntos extremos de A , $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$. Como f es cóncava tenemos:

$$m = f(a) \geq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) \geq \min_{1 \leq i \leq N} f(a^i) = f(a^j)$$

así que $f(a^j) = m$ para un punto extremo a^j de A .

Capítulo 23

Funciones gauge de conjuntos convexos

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo que contiene el cero en su interior: $0 \in \text{int}(A)$. Podemos definir una función $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ como:

$$\varphi(x) = \text{int}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para ver que esta función está correctamente definida, supondremos que $x \neq 0$ y puesto que $0 \in \text{int}(A)$, debe haber una vecindad V de cero contenida en A : $0 \in V \subseteq A$ donde V es abierto. Por lo tanto existe un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\epsilon x \in V \subseteq A$ entonces $x \in \frac{1}{\epsilon}A$ y esto muestra que el conjunto: $\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ no es vacío cuando $x \neq 0$. Además está compuesto de valores reales positivos, por lo cual está acotado interiormente y el valor $\varphi(x) = \text{int}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ está plenamente definido como un real no negativo. Cuando $x = 0$ encontramos que $0 \in \lambda A \forall \lambda > 0$ dado que $0 \in \text{int}(A)$, entonces $\varphi(0) = 0$. Vemos que esta función está bien definida y le llamaremos función *GAUGE* para el conjunto A . A continuación enumeraremos sus propiedades básicas:

1. Homogeneidad para escalares positivos:

$$\varphi(kx) = k\varphi(x) \quad \text{cuando } k \geq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Subaditividad:

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

3. Continuidad: φ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

4. $\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 1\} = \text{int}(A)$

5. $\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \leq 1\} = \bar{A}$

Demostraremos a continuación estas propiedades:

1. Cuando $k > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi(kx) &= \text{int}\{\lambda > 0 : kx \in \lambda A\} \\ &= \text{int}\{\lambda > 0 : x \in \frac{\lambda}{k}A\} \\ &= \text{int}\{kl, l > 0 : x \in lA\} \\ &= k \text{int}\{l > 0 : x \in lA\} \\ &= k\varphi(x)\end{aligned}$$

cuando $k = 0$ el resultado es trivial:

$$\begin{aligned}\varphi(kx) &= \varphi(0) = 0 \\ k\varphi(x) &= 0\end{aligned}$$

2. Supongamos que $x, y \in \mathbb{R}^n$ y consideremos los conjuntos:

$$\begin{aligned}e_1 &= \{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \\ e_2 &= \{\lambda > 0 : y \in \lambda A\}.\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 \in e_1$, $\lambda_2 \in e_2$ son elegidos de manera arbitraria, entonces

$$x = \lambda_1 a^1; \quad y = \lambda_2 a^2$$

donde $a^1, a^2 \in A$, puesto que A es convexo encontramos que

$$a^3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a^1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a^2 \in A$$

y así tenemos:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)a^3 = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 = x + y$$

por lo cual $x + y \in (\lambda_1 + \lambda_2)A$ y por definición $\varphi(x + y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Puesto que $\lambda_1 \in e_1$ y $\lambda_2 \in e_2$ fueron elegidos de manera arbitraria al tomar ínfimos encontramos $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

3. Dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un $\rho > 0$ que posiblemente depende de ϵ , tal que: la bola abierta con centro en el origen:

$$V\rho = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < \rho\}$$

de radio ρ , está contenida en ϵA : $V\rho \subseteq \epsilon A$. Esto es posible debido a que 0 también es punto interior de ϵA para cualquier $\epsilon > 0$. Cuando $x, y \in \mathbb{R}^n$ cumplen con $\|x - y\| < \delta$, entonces $x - y \in V\rho \subseteq \epsilon A$ luego $\varphi(x - y) < \epsilon$. Empleando la subaditividad de φ , encontramos:

$$\varphi(x) = \varphi(x - y + y) \leq \varphi(x - y) + \varphi(y)$$

luego

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq \varphi(x - y) < \epsilon.$$

Repetiendo el mismo argumento a partir de la afirmación $\|x - y\| < \delta$, pero intercambiando los papeles de x e y , encontramos:

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq \varphi(y - x) < \epsilon.$$

y así concluimos que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$$

siempre que $\|x - y\| < \delta$. Lo cual comprueba que φ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

4. Mostraremos que $\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 1\}$. Puesto que φ es continua, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 1\}$ es abierto. Cuando $x \in \mathbb{R}^n$ cumple $\varphi(x) < 1$, debe existir un $\lambda \in (0, 1)$ tal que $x \in \lambda A$, luego $x \in \lambda a$ con $a \in A$ y $\lambda \in (0, 1)$, así que x es un punto interior al segmento $[0, a]$. Puesto que $0 \in \text{int}(A)$ y $a \in A$, siendo A convexo, todo el segmento $[0, a]$ debe estar incluido en el conjunto A . Así que $x = \lambda a \in A$. Vemos de esta forma que $\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 1\}$ es un conjunto abierto contenido en A . Para comprobar que $\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 1\}$ es el interior del conjunto A , mostraremos que este conjunto contiene todos los puntos interiores de A . Sea a un punto interior del conjunto A , entonces existe una vecindad V de a contenida en A : $a \in V \subseteq A$ donde V es un conjunto abierto. Vemos fácilmente que debe existir un valor $p > 1$ tal que $pa \in V \subseteq A$, entonces $a \in \frac{1}{p}A$ y así $\varphi(a) < \frac{1}{p} < 1$. Comprobamos de esta manera que

$$\text{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) < 1\}.$$

5. $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \leq 1\}$.

Puesto que $\text{int}(A) \neq \emptyset$, dado $y \in \bar{A}$ existe una sucesión $\{x^n\} \subseteq \text{int}(A)$ tal que $x^n \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $\varphi(x^n) < 1$ y φ es continua, tenemos $\varphi(y) \leq 1$. Esto muestra que $\bar{A} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \leq 1\}$. Cuando $x \in \mathbb{R}^n$ cumple $\varphi(x) \leq 1$, separamos dos casos:

- a) Si $\varphi(x) < 1$ sabemos $x \in \text{int}(A) \subseteq \bar{A}$
- b) Si $\varphi(x) = 1$, entonces dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $1 + \frac{1}{n} > 1$, luego existe un λ : $1 < \lambda_n < 1 + \frac{1}{n}$ con $x \in \lambda_n A$, de donde $\frac{x}{\lambda_n} \in A$. Puesto que $1 < \lambda_n < 1 + \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, es evidente que $\lambda_n \rightarrow 1$ si $n \rightarrow \infty$, así que $\frac{x}{\lambda_n} \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo $\left\{ \frac{x}{\lambda_n} \right\} \subseteq A$, así que x es punto límite para A , luego $x \in \bar{A}$.

Capítulo 24

Envolturas convexas de funciones

Dada una función convexa $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es fácil ver que g está acotada inferiormente por una función lineal afín $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Basta con tomar un punto $(a, g(a))$ en la gráfica de g , el cual es un punto frontera del epígrafe de g , entonces existe un hiperplano de soporte H para $\text{Epi}(g)$ en el punto $(a, g(a))$. El hiperplano H se puede describir como: $H = \text{graph}(l)$ donde l es una función lineal afín de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} tal que $l(a) = g(a)$. Como H es hiperplano de soporte para $\text{Epi}(g)$, tenemos $\text{Epi}(g) \subseteq H^+ = \text{Epi}(l)$, por lo tanto $l(x) \leq g(x)$ porque $(x, g(x)) \in \text{Epi}(l) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Esta afirmación nos permite concluir que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada inferiormente por una función convexa si y solo si está acotada inferiormente por una función lineal afín. Veremos la utilidad de esta observación a continuación.

Cuando $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada inferiormente por una función convexa, podemos definir una función $f_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ llamada *envoltura convexa* de f de la siguiente manera:

$$f_c(x) = \sup\{g(x) : g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ es convexa, } g \leq f \text{ en } \mathbb{R}^n\}. \quad (24.1)$$

Resaltamos que el conjunto a la derecha no es vacío y está acotado superiormente, por lo cual $f_c(x)$ está correctamente definido como un valor finito.

A partir de los resultados de funciones convexas que hemos estudiado es fácil ver algunas propiedades inmediatas de la función f_c .

1. La envoltura convexa $f_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa como su nombre lo indica; de aquí se sigue que es continua.
2. Por definición $f_c \leq f$ en \mathbb{R}^n .
3. f_c es la mayor función convexa que acota inferiormente a f , es decir que $g \leq f_c$ siempre que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sea convexa con $g \leq f$. Esto justifica su nombre *envoltura convexa*.

4. La envoltura convexa $f_c(x)$ admite la definición (??) tomando MÁXIMO en lugar de supremo. Esto es consecuencia de nuestra observación anterior.
5. La envoltura convexa f_c admite la siguiente definición alternativa:

$$f_c(x) = \sup\{l(x) : l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ es afín, } l \leq f\}.$$

Basta reproducir la explicación dada al comienzo de esta sección, si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa existe una función lineal afín $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide con g en x y acota inferiormente a g . Resaltamos que l depende de la elección del punto x .

6. Cuando $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está acota inferiormente por una función afín, tenemos que $\text{Epi}(f_c) = \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$. Esta propiedad se sigue de los elementos de análisis convexo que hemos presentado.

Puesto que $f_c \leq f$, $\text{Epi}(f) \subseteq \text{Epi}(f_c)$ luego $\text{co}(\text{Epi}(f)) \subseteq \text{co}(\text{Epi}(f_c)) = \text{Epi}(f_c)$ por que $\text{Epi}(f_c)$ es convexo. Al tomar clausura topológica tenemos:

$$\overline{\text{co}(\text{Epi}(f))} \subseteq \overline{\text{Epi}(f_c)} = \text{Epi}(f_c)$$

porque $\text{Epi}(f_c)$ es cerrado, debido a que f_c es continua.

Para mostrar la inclusión opuesta:

$$\text{Epi}(f_c) \subseteq \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$$

acudimos a los resultados de separación del análisis convexo. Supongamos que $(x^0; t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ no pertenece a $\overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$ el cual es un conjunto convexo y cerrado, entonces existe un hiperplano H que separa estrictamente, fuertemente al punto $(x^0; t_0)$ del conjunto $\overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$. Eso implica que podemos expresar H como: $H = \text{graph}(l)$ donde $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín, con $(x^0; t_0) \in H_0^-$; luego $t_0 < l(x^0)$; además existe $\varsigma > 0$ talque

$$\overline{\text{co}(\text{Epi}(f))} \subseteq H_\varsigma^+ = \text{Epi}(l + \varsigma)$$

como se puede ver en la figura ??.

Mostraremos que $(x^0; t_0) \notin \text{Epi}(f_c)$. Como $\text{Epi}(f_c) \subseteq \text{Epi}(l + \varsigma)$, vemos que $l(x) + \varsigma \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$, entonces $l(x) + \varsigma \leq f_c(x)$ porque f_c es la mayor función convexa que acota inferiormente a f . Entonces $l + \varsigma \leq f_c$ en \mathbb{R}^n , en particular:

$$t_0 < l(x^0) < l(x^0) + \varsigma \leq f_c(x^0)$$

así que $(x^0; t_0) \notin \text{Epi}(f_c)$. Con este argumento verificamos que $\text{Epi}(f_c) \subseteq \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$, de donde concluimos $\text{Epi}(f_c) = \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$.

Observación: Es importante recalcar que la propiedad anterior no es cierta si suprimimos la clausura topológica a la derecha, en general. Basta estudiar el caso de la función Gaussiana:

$$f(t) = e^{-t^2/2} \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Figura 24.1: $\overline{\text{co}(\text{Epi}(f))} \subseteq H_\zeta^+ = \text{Epi}(l + \varsigma)$

7. Es importante caracterizar la envoltura convexa de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, acotada inferiormente por una función afín, de la siguiente manera:

$$f_c(x) = \inf \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i)$$

donde el ínfimo contempla la familia de todas las combinaciones convexas en \mathbb{R}^n que igualan al punto x :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i = x$$

donde $a^1, \dots, a^N \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$.

Para demostrar esta afirmación definimos la semirrecta abierta en \mathbb{R}^{n+1}

$$r_a = \{(a; t) \in \mathbb{R}^{n+1} / t > f_c(a)\}$$

y evidentemente

$$f_c(a) = \inf\{t : (a; t) \in r_a\}.$$

Como $r_a \subseteq \inf \text{Epi}(f_c)$ y hemos visto que $\text{Epi}(f_c) = \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$, entonces $r_a \subseteq \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$ por lo tanto, cada punto $(a; t) \in r_a$ lo podemos expresar como:

$$(a; t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a^i; t_i)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$; $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$ y $f(a^i) \leq t_i \forall i = 1, \dots, N$.

Entonces

$$f_c(a) = f_c \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i \right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f_c(a^i) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) \leq t$$

como t es arbitrario con $t > f_c(a)$, entonces concluimos:

$$f_c(a) = \inf \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i)$$

cuando $\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i = a$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$.

Por el teorema de Caratheodory podemos tomar $N = n + 2$, y concluir que

$$f_c(a) = \inf \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(a^i) \quad (24.2)$$

cuando $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2} \geq 0$; $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+2} = 1$ con $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i a^i = a$.

Hemos visto que $\text{Epi}(f_c) = \overline{\text{co}(\text{Epi}(f))}$ y además que podemos definir el valor $f_c(a)$ como

$$f_c(a) = \inf \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(a^i)$$

donde el ínfimo recorre todos los valores $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i f(a^i)$ de combinaciones convexas $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i a^i$ que igualan al punto a . Es interesante notar que el ínfimo puede tomarse como mínimo si y solo si $\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$. Note que hemos suprimido la clausura topológica. Esto nos lleva a presentar una nueva propiedad de las envolturas convexas.

8. Dada una $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que esté acotada inferiormente por una función afín, podemos representar el epígrafe de su envoltura convexa como:

$$\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$$

si y solamente si todos sus valores se pueden expresar como

$$f_c(a) = \text{mín} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i)$$

donde el mínimo contempla todas las combinaciones convexas construidas con valores $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$; puntos $a^1, \dots, a^{n+1} \in \mathbb{R}^n$, tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i = a.$$

Es interesante notar que hemos reducido el número de términos de $n + 2$ a $n + 1$.

Demostración: Supongamos que $\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$, como $(a; f_c(a)) \in \text{Epi}(f_c)$ entonces existen valores $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ y puntos $(a^1; t_1), \dots, (a^N; t_N) \in$

Epi(f) tales que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \lambda_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i a^i &= a \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i t_i &= f_c(a)\end{aligned}$$

porque $(a; f_c(a))$ puede ser expresado como una combinación convexa de puntos de Epi(f) en la forma:

$$(a; f_c(a)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a^i; t_i)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$.

Por la convexidad de f_c tenemos:

$$f_c(a) = f_c\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i\right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f_c(a^i) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i)$$

porque $f_c \leq f$. Como cada punto $(a^i; t_i) \in \text{Epi}(f)$, entonces $f(a^i) \leq t_i \forall i = 1, \dots, N$ por lo tanto:

$$f_c(a) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i t_i = f_c(a).$$

Lo cual muestra que

$$f_c(a) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i)$$

con

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i = a$$

siempre que podamos expresar al punto $(a; f_c(a))$ como una combinación convexa de puntos de Epi(f).

Todos los puntos $(a; f_c(a)), (a^1; t_1), \dots, (a^N; t_N)$ están inmersos en \mathbb{R}^{n+1} pero en particular pertenecen a una misma variedad afín de dimensión n , esta es el hiperplano H que es hiperplano de soporte para el conjunto Epi(f_c) en el punto $(a; f_c(a))$. Supongamos por comodidad que $\lambda_1, \dots, \lambda_N \geq 0$ con $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$; $\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i = a$; $\sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) = f_c(a)$, sea $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función afín tal que $H = \text{graph}(l)$, entonces puesto

que H que es hiperplano de soporte para $\text{Epi}(f_c)$ en $(a; f_c(a))$ debemos tener: $l \leq f_c \leq f$ en \mathbb{R}^n con $l(a) = f_c(a)$. Para cada $i = 1, \dots, N$ tenemos $l(a^i) \leq f(a^i)$, supongamos que $l(a^j) < f(a^j)$ para algún $j \in \{1, \dots, N\}$, entonces:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i l(a^i) < \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i)$$

pero por linealidad de l encontramos:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i l(a^i) = l\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i\right) = l(a) = f_c(a)$$

por lo tanto:

$$f_c(a) = l(a) < \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) = f_c(a),$$

de donde obtenemos una contradicción, así que: $l(a^i) = f(a^i) \forall i = 1, \dots, N$. Esto muestra que todos los puntos $(a; f_c(a)), (a^1; t_1), \dots, (a^N; t_N)$ pertenecen al hiperplano H .

Como

$$(a; f_c(a)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a^i; t_i)$$

indica que $(a; f_c(a))$ se puede expresar como combinación convexa de los puntos $\{(a^i; t_i) : i = 1, \dots, N\}$, entonces podemos aplicar el teorema de Caratheodory sobre la variedad afín H para reducir (si es el caso) esta combinación convexa hasta un número máximo de $n+1$ términos (H tiene dimensión n). Por lo cual podemos expresar $f_c(a)$ como

$$f_c(a) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$; $a^1, \dots, a^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ con $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$; $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i = a$, finalmente comprobaremos que $f_c(a)$ admite la representación:

$$f_c(a) = \min \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i)$$

donde el mínimo recorre todas las combinaciones convexas, con $n+1$ términos a lo sumo, que satisfacen: $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i = a$. Recíprocamente, si esto es cierto, vemos que $\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$. Como $f_c \leq f$ y epígrafe de f_c es convexo, vemos que $\text{Epi}(f) \subseteq \text{Epi}(f_c)$ y de aquí que $\text{co}(\text{Epi}(f)) \subseteq \text{Epi}(f_c)$. Cuando $(a; t) \in \text{Epi}(f_c)$ encontramos que $f_c(a) \leq t$. Por hipótesis, existen

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0; a^1, \dots, a^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tales que: $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i &= a \\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i) &= f_c(a) \end{aligned} \quad (24.3)$$

$(a; t) = (a; f_c(a) + t - f_c(a)) = (a; f_c(a) + L)$ donde $L = t - f_c(a) \geq 0$. Podemos expresar $(a; t) \in \text{Epi}(f_c)$ de la siguiente manera:

$$(a; t) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i) + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L \right)$$

donde hemos utilizado las relaciones (??). Entonces

$$(a; t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (a^i; f(a^i) + L).$$

Pero $f(a^i) + L > f(a^i)$, luego $(a^i; f(a^i) + L) \in \text{Epi}(f) \forall i = 1, \dots, n+1$. Concluimos que $(a; t) \in \text{co}(\text{Epi}(f))$.

9. Como consecuencia inmediata de la anterior proposición tenemos:

Corolario: 24.0.1. *Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acota inferiormente por una función lineal, tenemos que*

$$\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$$

si y sólo si

$$a \in \text{co}\{x \in \mathbb{R}^n / l(x) = f(x)\} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

donde $l(x)$ es la función afín que representa el hiperplano de soporte para el conjunto convexo $\text{Epi}(f_c)$ en el punto $(a; f_c(a))$.

Demostración: Si $\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$, entonces para cada punto $a \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$f_c(a) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1; a^1, \dots, a^{n+1} \in \mathbb{R}^n$; con $a = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i$. Como vimos, si $l(x)$ representa al hiperplano de soporte para el conjunto $\text{Epi}(f_c)$ en el punto $(a; f_c(a))$, entonces $l(a^i) = f(a^i) \forall i = 1, \dots, n+1$, entonces

$$a \in \text{co}\{x \in \mathbb{R}^n / l(x) = f(x)\}. \quad (24.4)$$

Recíprocamente, si se cumple (??) entonces, existen $a^1, \dots, a^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tales que $l(a^i) = f(a^i)$ para $i = 1, \dots, n+1$ y tales que $a = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a^i$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ con $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, entonces

$$f_c(a) = f_c\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i\right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) \quad (24.5)$$

por convexidad, pero como hemos visto

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i f(a^i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i l(a^i) = l\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i a^i\right) = l(a) \quad (24.6)$$

por linealidad de $l(x)$. Como l representa al hiperplano de soporte para $\text{Epi}(f_c)$ en el punto $(a; f_c(a))$, tenemos: $l(a) = f_c(a)$, entonces utilizando (??) y utilizando (??) concluimos que

$$f_c(a) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i).$$

Como este argumento es válido para cada $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, tenemos que podemos escribir f_c en la siguiente forma:

$$f_c(a) = \min \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a^i)$$

donde el mínimo contempla todas las combinaciones convexas de puntos en \mathbb{R}^n con $n+1$ términos que igualan al punto a . Entonces $\text{Epi}(f_c) = \text{co}(\text{Epi}(f))$ por el teorema.

10. Una última propiedad de envolturas convexas involucra directamente problemas de optimización global que serán de interés más adelante.

Proposición: 24.0.1. *Cuando $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acota inferiormente, un punto $a \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo global de f si y solamente si a es un mínimo de f_c con $f_c(a) = f(a)$.*

Demostración:

- a) a es mínimo global de f , entonces $f(a) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ y tenemos que $f(a) \leq f_c(x) \leq f(x)$ porque la constante $f(a)$ es convexa y minimiza la función f , evidentemente cuando $x = a$, tenemos $f(a) \leq f_c(a) \leq f(a)$, luego $f_c(a) = f(a)$.
- b) Supongamos que a es un mínimo de f_c que cumple $f_c(a) = f(a)$. Como $f_c \leq f$, tenemos $f(a) = f_c(a) \leq f_c(x) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$, entonces a es mínimo global para f .

Capítulo 25

Envolturas convexas en optimización

FALTA

Capítulo 26

Subgradienles y subdiferenciales

FALTA

Capítulo 27

Programas matemáticos sin restricciones: con derivabilidad

FALTA

Capítulo 28

Programas matemáticos con restricciones: sin derivabilidad

Consideremos problemas de optimización descritos de la siguiente forma

$$\begin{array}{l} \text{MINIMIZAR } f(x) \\ \text{CUANDO } x \in \Omega \end{array}$$

donde f es una función definida en Ω , el cual es un subconjunto de \mathbb{R}^n definido como

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1, \dots, n\}. \quad (28.1)$$

El lector podrá deducir fácilmente cómo formular los planteamientos que daremos aquí cuando el problema consiste en maximizar una función.

Este se representa en forma sucinta como:

$$\begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ \text{s.a.} \\ x \in \Omega \end{array} \quad (28.2)$$

donde s.a. se refiere a *sujeto a*. La función f se denomina *función objetivo* y el conjunto Ω se denomina *conjunto factible*. La variable $x \in \mathbb{R}^n$ se denomina *variable de diseño* y cuando $x \in \Omega$ decimos que x es una *solución factible*. Si existe un punto $x^0 \in \Omega$ tal que

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

decimos que x^0 es una *solución factible óptima*, si $V(x^0, \epsilon)$ es una vecindad de radio $\epsilon > 0$ del punto x^0 y se cumple que

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega \cap V(x^0, \epsilon)$$

decimos que x^0 es un mínimo local de f en el conjunto Ω . Cuando x^0 es una solución factible óptima también la llamaremos mínimo global de f en Ω . Evidentemente cada mínimo global de f en Ω es un mínimo local de f pero no necesariamente esto es cierto a la inversa. Sin embargo, cuando f es una función convexa y Ω es un conjunto convexo los mínimos locales de f en Ω también son mínimos globales. Cuando el conjunto factible Ω está definido en la forma (??) decimos que el programa matemático (??) es un programa no lineal descrito por restricciones en forma de desigualdades. Cuando todas las funciones g_1, \dots, g_m son funciones convexas, el conjunto Ω es un conjunto convexo. Cuando Ω es convexo decimos que el programa matemático (??) es un programa convexo. En general podemos suponer que las funciones f, g_1, \dots, g_m están definidas en \mathbb{R}^n , cuando sea conveniente especificaremos un dominio común $A \subseteq \mathbb{R}^n$ que en general será un conjunto abierto.

Emplearemos elementos de análisis convexo ya presentados para estudiar programas matemáticos no lineales descritos como (??). Supongamos que f, g_1, \dots, g_m son funciones definidas en un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y planteamos el programa no lineal:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{28.3}$$

Con este programa matemático podemos asociar dos tipos particulares de problemas conocidos como el problema de *punto de silla de Fritz-John* y el *problema de Kuhn-Tucker*.

Problema de Fritz-John: Este problema consiste en encontrar un punto $\bar{x} \in A$, un valor $\bar{\gamma}_0 \geq 0$ y un vector $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n$ tales que:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\gamma}_0, \lambda) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{\gamma}_0, \bar{\lambda}) \leq \varphi(x, \bar{\gamma}_0, \bar{\lambda})$$

para cada $x \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, donde φ es una función Lagrangiana definida como:

$$\varphi(x, \gamma_0, \lambda) = \gamma_0 f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

siendo $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$.

Problema de Kuhn-Tucker: Este problema consiste en encontrar un punto $\bar{x} \in A$, un vector $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n$ tales que:

$$\psi(\bar{x}, \lambda) \leq \psi(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq \psi(x, \bar{\lambda})$$

para cada $x \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, donde ψ es una función Lagrangiana definida como:

$$\psi(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Las componentes del vector λ se denominan *multiplicadores de Lagrange*.

Vemos fácilmente que una solución al problema de Fritz-John con $\bar{\gamma}_0 > 0$ nos brinda una solución para el problema de Kuhn-Tucker tomando $(\bar{x}; \bar{\lambda}/\bar{\gamma}_0)$.

Basta ver que

$$\begin{aligned}\varphi(x, \gamma_0, \lambda) &= \gamma_0 \left(f(x) + \frac{\lambda}{\gamma_0} \cdot g(x) \right) \\ &= \gamma_0 \psi \left(x, \frac{\lambda}{\gamma_0} \right)\end{aligned}$$

cuando $\gamma_0 > 0$. De igual modo una solución al problema de Kuhn-Tucker nos brinda una solución al problema de Fritz-John tomando $(\bar{x}, 1, \bar{\lambda})$. Basta ver que $\psi(x, \lambda) = \varphi(x, 1, \lambda)$.

28.1. Condiciones suficientes de optimalidad

Mostraremos aquí la forma en que los problemas de Fritz-John y Kuhn-Tucker nos dan condiciones suficientes para determinar los óptimos de un programa no lineal en la forma (??).

Proposición: 28.1.1. *Cuando $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ con $\bar{x} \in A$ y $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n$ resuelven el problema de Kuhn-Tucker, entonces \bar{x} es una solución óptima para el programa no lineal (??).*

Demostración: Supongamos que $\bar{x} \in A$ y $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n$ solucionan el problema de Kuhn-Tucker, entonces tenemos:

$$f(\bar{x}) + \lambda \cdot g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{\lambda} \cdot g(x) \quad \forall x \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^n. \quad (28.4)$$

De la primera desigualdad tenemos:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \cdot g(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^n,$$

haciendo $\lambda = 0_m$ tenemos

$$-\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) \leq 0$$

y haciendo $\lambda - \bar{\lambda} \equiv e^i$ tenemos $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$, como $\bar{\lambda} \geq 0$ entonces:

$$\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) \leq 0$$

y concluimos que $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = 0$.

Por lo tanto la segunda desigualdad en (??) nos dice que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{\lambda} \cdot g(x) \quad \forall x \in A,$$

como $\bar{\lambda} \geq 0$ en \mathbb{R}^m concluimos que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{\lambda} \cdot g(x) \leq f(x)$$

cuando $g(x) \leq 0$, es decir cuando $g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$. Esto muestra que \bar{x} es solución factible óptima del programa no lineal (??).

Corolario: 28.1.1. *Cuando $(\bar{x}, \bar{\gamma}_0, \bar{\lambda})$ con $\bar{\gamma}_0 > 0$ resuelve el problema de Fritz-John, entonces \bar{x} es solución factible óptima de (??).*

28.1.1. Restricciones mixtas

Si consideramos un programa no lineal dado en la forma

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

entonces el problema de Kuhn-Tucker correspondiente toma la siguiente forma: encontrar $\bar{x} \in A$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ y $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^k$ tales que

$$\psi(\bar{x}, \lambda, \gamma) \leq \psi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma}) \leq \psi(x, \bar{\lambda}, \bar{\gamma})$$

$\forall x \in A$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m; \gamma \in \mathbb{R}^k$ donde $\psi(x, \lambda, \gamma) = f(x) + \lambda \cdot g(x) + \gamma \cdot h(x)$ donde $h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$.

En esta situación el problema de Kuhn-Tucker correspondiente también nos da una condición suficiente de optimalidad.

28.2. Condiciones necesarias de optimalidad (Fritz-John)

Cuando $A \in \mathbb{R}^n$ es convexo, f, g_1, \dots, g_m son funciones convexas definidas en A , siendo \bar{x} una solución óptima del programa no lineal:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & \text{con } x \in A, \end{aligned} \tag{28.5}$$

entonces existe $\bar{p}_0 \geq 0$ y $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m \geq 0$ no todas nulas tales que $(\bar{x}, \bar{p}_0, \bar{p})$ resuelven el problema de punto de silla de Fritz-John con $\bar{p} \cdot g(\bar{x}) = 0$.

Demostración: Como \bar{x} es solución óptima del programa (??), entonces no existe ningún $x \in A$ tal que $f(x) - f(\bar{x}) < 0$; $g_i(x) < 0$ para $i = 1, \dots, m$. Por lo tanto existen $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m$ no todos nulos tales que:

$$\bar{p}_0(f(x) - f(\bar{x})) + \bar{p} \cdot g(x) \geq 0 \quad \forall x \in A.$$

De aquí tenemos que

$$\bar{p}_0 f(\bar{x}) \leq \bar{p}_0 f(x) + \bar{p} \cdot g(x) \quad \forall x \in A,$$

tomando $x = \bar{x}$ encontramos $0 \leq \bar{p} \cdot g(\bar{x})$ como $\bar{p}_0 > 0$ y $g(\bar{x}) \leq 0$ tenemos $\bar{p} \cdot g(\bar{x}) = 0$, así que

$$\bar{p}_0 f(\bar{x}) + \bar{p} \cdot g(\bar{x}) \leq \bar{p}_0 f(x) + \bar{p} \cdot g(x) \quad \forall x \in A.$$

Como $g(\bar{x}) \leq 0$ tenemos que $p \cdot g(\bar{x}) \leq 0 \forall p \in \mathbb{R}_+^m$, entonces

$$\bar{p}_0 f(\bar{x}) + p \cdot g(\bar{x}) \leq p_0 f(\bar{x}) + \bar{p} \cdot g(\bar{x})$$

por que $\bar{p} \cdot g(\bar{x}) = 0$, para cada $p \in \mathbb{R}_+^m$.

Corolario: 28.2.1. Si $A \in \mathbb{R}^n$ es convexo, f, g_1, \dots, g_m son funciones convexas en A y h_1, \dots, h_k son funciones afines en A , cuando \bar{x} es una solución óptima para el programa no lineal:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

entonces, existe $\bar{p}_0 \geq 0$, $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^m$, $q \in \mathbb{R}^k$ tales que $(\bar{x}, \bar{p}_0, \bar{p}, \bar{q})$ resuelven el problema de punto de silla de Fritz-John planteado como: encontrar $\bar{p}_0 \geq 0$; $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^m$; $q \in \mathbb{R}^k$ con:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{p}_0, p, q) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{p}_0, \bar{p}, \bar{q}) \leq \varphi(x, \bar{p}_0, \bar{p}, \bar{q}) \quad \forall x \in A, \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^m, \quad \forall q \in \mathbb{R}^k$$

donde

$$\varphi(x, p_0, p, q) = p_0 f(x) + p \cdot g(x) + q \cdot h(x)$$

y $\bar{p}_0, \bar{p}, \bar{q}$ no son todos nulos.

28.3. Condiciones necesarias de optimalidad (Kuhn-Tucker)

Dado el programa no lineal

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{28.6}$$

donde las funciones f, g_1, \dots, g_m son convexas y están definidas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que las restricciones $g_i(x) \leq 0$ con $i = 1, \dots, m$ satisfacen la *condición de calificación de Slater en A* si existe un punto $a \in A$ tal que $g_i(a) < 0$ para cada $i = 1, \dots, m$. Por el teorema de GONDAN, esta afirmación es equivalente a decir que no hay ningún $p \in \mathbb{R}_+^m$, no nulo, tal que $p \cdot g(x) \geq 0 \forall x \in A$.

Diremos que las restricciones $g_i(x) \leq 0$ con $i = 1, \dots, m$ satisfacen la *condición de calificación de Karlin en A* si no existe ningún vector $p \in \mathbb{R}_+^m / \{0\}$ tal que $p \cdot g(x) \geq 0 \forall x \in A$. Como vimos esta condición es equivalente a la condición de Slater. Observamos que si cada una de las funciones g_i con $i = 1, \dots, m$ es estrictamente convexa entre dos puntos a, b del conjunto factible $\Omega = \{x \in A / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$, entonces las restricciones $g_i \leq 0$ con

$i = 1, \dots, m$ satisfacen la condición de Slater, basta tomar $t \in (0, 1)$, como Ω es convexo: $ta + (1-t)b \in \Omega$, entonces

$$g_i(ta + (1-t)b) < tg_i(a) + (1-t)g_i(b) \leq 0$$

por lo tanto $g_i(ta + (1-t)b) < 0$ con $ta + (1-t)b \in \Omega \subseteq A$. Observe que hemos utilizado la convexidad de las funciones g_i que representan las restricciones.

Teorema 28.3.1. Teorema de Kuhn-Tucker (sin diferenciabilidad)

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, que las funciones f, g_1, \dots, g_m son funciones convexas definidas en A y que las restricciones del programa no lineal (??, dadas por las funciones g_1, \dots, g_m , satisfacen las condiciones de calificación de Karlin en el conjunto A . Si \bar{x} es una solución factible óptima del programa no lineal (??) entonces existe un $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ que resuelve el problema de punto de silla de Kuhn-Tucker y además cumple $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = 0$.

Demostración: Como vimos en el apartado anterior, existe $\bar{x} \in A, \bar{\lambda}_0 \geq 0$ y $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ que satisfacen el problema de punto de silla de Fritz-John. Si $\bar{\lambda}_0 > 0$, sabemos por la equivalencia entre los problemas de Fritz-John y Kuhn-Tucker que $(\bar{x}, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_0})$ es una solución al problema de Kuhn-Tucker. Si $\bar{\lambda}_0 = 0$ tenemos

$$\bar{\lambda}_0 f(\bar{x}) + \bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) \leq \bar{\lambda}_0 f(x) + \bar{\lambda} \cdot g(x) \quad \forall x \in A,$$

como $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = 0$, entonces $0 \leq \bar{\lambda} \cdot g(x) \quad \forall x \in A$, donde $\bar{\lambda}$ no es nulo, lo cual contradice la condición de calificación de Karlin.

28.3.1. Restricciones afines

Supongamos que f, g_1, \dots, g_m son funciones convexas en \mathbb{R}^n . Nos interesa establecer condiciones necesarias sobre las soluciones factibles óptimas de programas no lineales dados en la forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{28.7}$$

los cuales involucran un conjunto de restricciones lineales h_1, \dots, h_k que pueden expresarse en la forma $Ax = b$ donde la matriz A tiene k filas y n columnas y podemos suponer que es de rango k . Diremos que las restricciones $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_k$ satisfacen la *condición de calificación de Slater generalizada* cuando existe un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_i(x^0) < 0$ para $i = 1, \dots, m$ con $Ax^0 = b$. Si no existen vectores $p \in \mathbb{R}_+^m; q \in \mathbb{R}^k$ no simultáneamente nulos, tales que

$$p \cdot g(x) + q \cdot (Ax - b) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

diremos que las restricciones $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_k$ satisfacen la *condición de calificación de Karlin generalizada*. Si existen dos puntos a y b en el conjunto

admisibles $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m; Ax = b\}$ del programa no lineal (??) tales que cada función g_i con $i = 1, \dots, m$ es estrictamente convexa entre ellos, diremos que las restricciones g_1, \dots, g_m satisfacen la *condición de calificación estrictamente generalizada*.

Nuevamente vemos que como consecuencia del teorema de GOSDAN, la condición generalizada de Slater es equivalente a la condición generalizada de Karlin. Por otra parte, la condición de calificación estrictamente generalizada implica la condición generalizada de Slater y de Karlin.

Ahora podemos establecer una condición necesaria sobre las soluciones óptimas de un programa no lineal dado en la forma (??) que involucra restricciones lineales. Para ello utilizaremos un problema de punto de silla de Kuhn-Tucker correspondiente.

28.3.2. Problema de punto de silla de Kuhn-Tucker

Para programas no lineales con restricciones lineales, dados en la forma general (??) donde las restricciones dadas por las funciones afines pueden expresarse en forma de un sistema lineal como $Ax = b$, siendo A una matriz de rango k y dimensiones $k \times n$ el problema de punto de silla de Kuhn-Tucker toma la siguiente forma: encontrar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$, $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^k$ tales que:

$$\psi(\bar{x}, \lambda, \gamma) \leq \psi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma}) \leq \psi(x, \bar{\lambda}, \bar{\gamma})$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, cada $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ y cada $\gamma \in \mathbb{R}^k$ donde ψ es una función Lagrangiana definida como:

$$\psi(x, \lambda, \gamma) = f(x) + \lambda \cdot g(x) + \gamma \cdot (Ax - b).$$

Teorema 28.3.2. *Si \bar{x} es una solución factible óptima del programa no lineal (??) con restricciones lineales, que satisfacen la condición de Karlin generalizada, entonces existen $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$, $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^k$ tales que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma})$ es una solución para el problema de punto de silla de Kuhn-Tucker, correspondiente al programa no lineal (??). Además \bar{x} y $\bar{\lambda}$ satisfacen $\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = 0$.*

Demostración: Sabemos que existe $\bar{\lambda}_0 \geq 0$; $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ y $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^k$ tales que $(\bar{x}, \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}, \bar{\gamma})$ satisfacen el problema de punto de silla de Fritz-John. Cuando $\bar{\lambda}_0 > 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{\lambda}/\bar{\lambda}_0, \bar{\gamma}/\bar{\lambda}_0)$ satisface el problema de punto de silla de Kuhn-Tucker del programa no lineal con restricciones lineales (??). Cuando $\bar{\lambda}_0 = 0$ tenemos:

$$\bar{\gamma} \cdot (A\bar{x} - b) = 0 \leq \bar{\lambda} \cdot g(x) + \bar{\gamma} \cdot (Ax - b) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde $\bar{\lambda}$ y $\bar{\gamma}$ no son simultáneamente nulos, con $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ y $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^k$, lo cual contradice la condición de Karlin generalizada.

28.4. Condiciones suficientes de Kuhn-Tucker: bajo condiciones de derivabilidad

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y abierto, sean f, g_1, \dots, g_m son funciones convexas y diferenciables en A , supongamos que \bar{x} es una solución factible óptima del programa no lineal

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (28.8)$$

que satisface las *condiciones de Kuhn-Tucker*, es decir existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

entonces \bar{x} es una solución óptima del programa no lineal (??).

Demostración: Por la convexidad de f sabemos que $f(x) - f(\bar{x}) \geq \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \quad \forall x \in A$. Como \bar{x} satisface las condiciones de Kuhn-Tucker tenemos:

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = - \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

como cada función g_i es convexa tenemos:

$$-\vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \geq g_i(\bar{x}) - g_i(x)$$

para cada $i = 1, \dots, m$. Como los multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son no negativos encontramos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) &\geq \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(\bar{x}) - g_i(x)) \\ &= - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \geq 0 \end{aligned}$$

porque $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$ y por que $g_i(x) \leq 0$ cuando x es una solución factible del programa (??). Entonces $f(x) - f(\bar{x}) \geq 0$ para cada solución factible x , por lo tanto podemos concluir que \bar{x} es solución factible óptima.

28.4.1. Restricciones saturadas

Cuando \bar{x} es una solución factible del programa no lineal (??) entonces $g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$. Diremos que g_j es una restricción *saturada* en \bar{x} , o también que la restricción g_j se *satura* en \bar{x} cuando $g_j(\bar{x}) = 0$. Entonces es

importante notar que las condiciones de Kuhn-Tucker las podemos expresar como:

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0$$

con $\lambda_i \geq 0 \forall i \in I$, donde I es el conjunto de índices que corresponden a las restricciones saturadas de la solución factible \bar{x} , es decir $I = \{j / g_j(\bar{x}) = 0\}$.

28.4.2. Problemas con restricciones de igualdad

Cuando nos encontramos a un programa no lineal dado en la forma

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{28.9}$$

donde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo y abierto, con f, g_1, \dots, g_m funciones convexas y diferenciables en A y h_1, \dots, h_k funciones afines en \mathbb{R}^n , entonces las condiciones suficientes de Kuhn-Tucker toman la siguiente forma: Si \bar{x} es una solución factible de (??) con

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \gamma_j \vec{\nabla} h_j(\bar{x}) = 0$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ con $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \forall i = 1, \dots, m$, entonces \bar{x} es solución factible óptima del programa no lineal (??). Para mostrar esto empleamos la convexidad de f que nos dice:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

y por las condiciones de Kuhn-Tucker tenemos:

$$-\vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \geq g_i(\bar{x}) - g_i(x)$$

para cada $i = 1, \dots, m$. Por la afinidad de las funciones h_1, \dots, h_k tenemos:

$$\vec{\nabla} h_j(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = h_j(x) - h_j(\bar{x})$$

entonces, por al condición $\lambda_i \geq 0$ sobre los multiplicadores, tenemos:

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(\bar{x}) - g_i(x)) + \sum_{j=1}^k \gamma_j (h_j(\bar{x}) - h_j(x))$$

pero $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \forall i = 1, \dots, m$ por las condiciones de Kuhn-Tucker, $h_j(\bar{x}) = 0 \forall j = 1, \dots, k$ porque \bar{x} es solución factible, entonces cuando x es una solución factible tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) & \geq \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \\ & \geq - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^k \gamma_j h_j(x) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

porque $h_j(x) = 0$, con $j = 1, \dots, k$ y $g_i(x) \leq 0$ con $i = 1, \dots, m$ cuando x es una solución factible. Entonces concluimos que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cualquier solución factible x en (??), así que \bar{x} es solución factible óptima de (??).

Corolario: 28.4.1. *Empleando los mismos argumentos podemos dar un marco más general de programas no lineales sujetos a restricciones mixtas donde las condiciones de Kuhn-Tucker nos dan las condiciones suficientes para sus soluciones óptimas. Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y abierto, supongamos que las funciones $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_k$ son convexas y diferenciables en A y supongamos que las funciones $h_{k'+1}, \dots, h_k$ son concavas y diferenciables en A . Sea \bar{x} una solución factible del programa no lineal:*

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{28.10}$$

que cumple las ecuaciones:

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \gamma_j \vec{\nabla} h_j(\bar{x}) = 0$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$; $\gamma_1, \dots, \gamma_k \geq 0$; $\gamma_{k'+1}, \dots, \gamma_k \leq 0$ con $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$, entonces \bar{x} es una solución óptima para el programa (??)

Demostración: Por la convexidad de f tenemos:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \quad \forall x \in A,$$

por las condiciones de Kuhn-Tucker tenemos:

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) = - \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^k \gamma_j \vec{\nabla} h_j(\bar{x})$$

entonces:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) & \geq g_i(\bar{x}) - g_i(x) \\ -\vec{\nabla} h_j(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) & \geq h_j(\bar{x}) - h_j(x) \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, k'$ debido a la convexidad de las funciones $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_{k'}$, análogamente

$$\vec{\nabla} h_j(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \leq h_j(\bar{x}) - h_j(x)$$

$\forall j = k'+1, \dots, k$ debido a la concavidad de las funciones $h_{k'+1}, \dots, h_k$. Supongamos que x es una solución factible básica para el programa matemático (??), entonces $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$ y $h_j(x) = 0$ para $j = 1, \dots, k$, entonces:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq$$

y por las condiciones de Kuhn-Tucker tenemos:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(\bar{x}) - g_i(x)) \geq 0$$

donde hemos empleado el hecho de que x y \bar{x} son soluciones factibles, por lo cual $h_j(x) = h_j(\bar{x}) = 0 \forall j = 1, \dots, k$ y las condiciones de Kuhn-Tucker $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \forall i = 1, \dots, m$ junto con el hecho de que $g_i(x) \leq 0 \forall i = 1, \dots, m$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$.

Capítulo 29

Programas matemáticos con restricciones: con derivabilidad

29.1. Condiciones necesarias para óptimos locales bajo condiciones de derivabilidad

Mostraremos aquí la forma en que resultados esenciales de análisis convexo nos proporcionan condiciones necesarias para la caracterización de óptimos locales en programas no lineales con restricciones de desigualdad dados en la forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{29.1}$$

cuando las funciones f, g_1, \dots, g_m son funciones diferenciables definidas en un dominio común abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

29.1.1. Forma lineal del problema de Gordan

Cuando A es una matriz de dimensiones $m \times n$, una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. Existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ay < 0$
2. Existe un vector $p \geq 0$ en \mathbb{R}^m no nulo tal que $A^t p = 0$

Para justificar este resultado vemos en primer lugar que si se cumple ?? no puede ser cierta la afirmación ??. Supongamos que $Ay < 0$ con $y \in \mathbb{R}^n$, si $p \geq 0$ con $p \neq 0$, entonces $p \cdot Ay = A^t p \cdot y < 0$, de manera que $A^t p \neq 0$, porque si

$A^t p = 0$ entonces $A^t p \cdot y = 0$ obteniendo así una contradicción. Supongamos que no es cierta la afirmación ?? entonces definimos los conjuntos:

$$V = \{Ay / y \in \mathbb{R}^n\}$$

$$W = \{b \in \mathbb{R}^m / b < 0\}$$

como hemos supuesto que ?? no es cierto, entonces no existe ningún $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ay < 0$, lo cual significa que los conjuntos V y W no intersectan. Por otra parte V y W son conjuntos convexos en \mathbb{R}^m , más específicamente V es el subespacio lineal que corresponde al recorrido de la transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y W es el interior del cono convexo \mathbb{R}_-^m . Aplicando la forma débil del teorema de separación, existe un $p \neq 0$ en \mathbb{R}^m tal que

$$Ay \cdot p \geq z \cdot p \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall z \in \mathbb{R}_-^m,$$

si e^j es un vector base canónico de \mathbb{R}^m , $-re^j \in \mathbb{R}_-^m$ para $r > 0$ arbitrario, entonces $-re^j \cdot p = -rp_j$ puede hacerse arbitrariamente grande si $p_j < 0$, entonces $p_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, m$. Dado $\epsilon > 0$, definimos $z^\epsilon = (-\epsilon, \dots, -\epsilon) \in \mathbb{R}_-^m$, por lo tanto

$$z^\epsilon \cdot p = -\epsilon \sum_{i=1}^m p_i \leq Ay \cdot p = y \cdot A^t p,$$

tomando límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, encontramos $0 \leq y \cdot A^t p$ con $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, entonces $A^t p = 0$. Concluimos que existe $p \in \mathbb{R}_+^m$, no nulo tal que $A^t p = 0$, como afirma la sentencia ??.

29.1.2. Conjunto factible y óptimos locales

El conjunto factible del programa matemático (??) está definido como:

$$\Omega = \{x \in A / g_i(x) \leq 0 \forall i = 1, \dots, m\}.$$

Una solución factible $\bar{x} \in \Omega$ es un óptimo local (de f en Ω) del problema (??) cuando existe una vecindad $B(\bar{x}; \epsilon)$ de radio $\epsilon > 0$ del punto $\bar{x} \in \Omega$ tal que:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega \cap B(\bar{x}; \epsilon).$$

Estudiaremos condiciones necesarias que nos permitan caracterizar los mínimos locales del programa (??) bajo los supuestos de derivabilidad establecidos sobre las funciones f, g_1, \dots, g_m .

29.1.3. Conos convexos de trabajo

Dada una solución factible $\bar{x} \in \Omega$ para el programa (??) definiremos algunos conjuntos de utilidad que resultan ser conos convexos.

Cono de direcciones factibles

Definimos el cono de direcciones factibles en \bar{x} como el conjunto $D_{\bar{x}}$ formado por aquellos vectores $y \in \mathbb{R}^n$ para los cuales existe un $\rho > 0$, con la propiedad que $\bar{x} + \lambda y \in \Omega \forall \lambda \in (0, \rho)$. El lector debe comprobar que $D_{\bar{x}}$ es un cono convexo en \mathbb{R}^n .

Cono de reducción (direcciones de descenso)

Puesto que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, si $y \in \mathbb{R}^n$ cumple con $\vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y < 0$, entonces y corresponde a una dirección de descenso de la función objetivo f en el punto \bar{x} basta ver que

$$f(\bar{x} + \lambda y) = f(\bar{x}) + \lambda \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y + \frac{\lambda^2}{2} \xi(\lambda)$$

siendo $\xi(\lambda)$ una función de error tal que $\xi(\lambda) \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$f(\bar{x} + \lambda y) < f(\bar{x})$$

cuando $\lambda \in (0, \rho)$ donde $\rho > 0$ depende de y .

Esto motiva la definición del *cono de reducción* o cono de *direcciones de descenso* como el conjunto $\mathfrak{L}_{\bar{x}}$ definido por aquellos vectores $y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y < 0$:

$$\mathfrak{L}_{\bar{x}} = \{y \in \mathbb{R}^n / \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y < 0\}$$

el cual es un semiespacio abierto en \mathbb{R}^n .

Cono de restricción (direcciones de restricción)

Supongamos que $\bar{x} \in \Omega$ es una solución factible, definimos $I(\bar{x})$ como el conjunto de los índices de las restricciones que se saturan en el punto \bar{x} :

$$I(\bar{x}) = \{i / g_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Supongamos que $y \in \mathbb{R}^n$ satisface $\vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot y < 0 \forall i \in I(\bar{x})$, entonces

$$g_i(\bar{x} + \lambda y) = g_i(\bar{x}) + \lambda \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot y + \frac{\lambda^2}{2} \xi(\lambda)$$

en particular si $i \in I(\bar{x})$ tenemos

$$g_i(\bar{x} + \lambda y) = \lambda \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot y + \frac{\lambda^2}{2} \xi(\lambda)$$

de manera que $g_i(\bar{x} + \lambda y) < 0$ cuando $\lambda \in (0, \delta)$ para algún $\delta > 0$ que depende de y . Cuando $i \notin I(\bar{x})$ entonces $g_i(\bar{x}) < 0$ y para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, por continuidad de g_i tenemos: $g_i(\bar{x} + \lambda y) < 0$ si $\lambda \in (0, \delta)$ donde δ depende de g_i y de \bar{x} . Por esta razón y es una dirección factible en \bar{x} siempre que $\vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot y < 0 \forall i \in I(\bar{x})$.

Esto motiva la definición de un conjunto denominado *cono de restricciones* como:

$$\mathfrak{R}_{\bar{x}} = \{y \in \mathbb{R}^n / \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot y < 0 \forall i \in I(\bar{x})\}$$

el cual es un cono poliédrico definido por los vectores $\vec{\nabla} g_i(\bar{x})$ con $i \in I(\bar{x})$.

29.1.4. Observaciones inmediatas

Supongamos que $\bar{x} \in \Omega$ es una solución factible del programa matemático (??). Si \bar{x} es un óptimo local del programa (??) entonces ninguna dirección factible en \bar{x} puede ser dirección de descenso de f en \bar{x} , si por ejemplo y es dirección de descenso y dirección factible, entonces $\bar{x} + \lambda y \in \Omega$ para cada $\lambda \in (0, \delta)$. Pero el valor de f en una solución factible en la forma $\bar{x} + \lambda y$ es:

$$f(\bar{x} + \lambda y) = f(\bar{x}) + \lambda \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y + \frac{\lambda^2}{2} \xi(\lambda)$$

como $\lambda \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y < 0$ porque y es dirección de descenso, entonces $f(\bar{x} + \lambda y) < f(\bar{x})$ tomando λ suficientemente pequeño. Esto contradice que \bar{x} sea un óptimo local de f en Ω . Esta afirmación implica que los conos de direcciones factibles y el cono de direcciones de descenso son disyuntos:

$$D_{\bar{x}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{x}} = \emptyset$$

cuando \bar{x} es un óptimo local para f en Ω . Como hemos visto, cada vector $y \in \mathfrak{R}_{\bar{x}}$ donde $\mathfrak{R}_{\bar{x}}$ es el cono de direcciones de restricción, es una dirección factible, entonces $\mathfrak{R}_{\bar{x}} \subseteq D_{\bar{x}}$, por lo cual $\mathfrak{R}_{\bar{x}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{x}} = \emptyset$ cuando \bar{x} es un óptimo local del programa (??).

29.2. Condiciones de Fritz-John

Diremos que una solución factible $\bar{x} \in \Omega$ del programa no lineal (??) satisface las condiciones de Fritz-John cuando existen multiplicadores $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ no todos nulos, tales que:

$$\begin{aligned} \lambda_0 \vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

o de manera equivalente, existe $\lambda_0 \geq 0$; $\lambda_i \geq 0$ para cada $i \in I(\bar{x})$ tales que

$$\lambda_0 \vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0$$

no siendo todos los multiplicadores λ_0, λ_i con $i \in I(\bar{x})$ nulos a la vez.

29.2.1. Condiciones necesarias de Fritz-John para óptimos locales

Cuando \bar{x} es un óptimo local del programa matemático (??) cuyas funciones f, g_1, \dots, g_m son diferenciables en un dominio común $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces \bar{x} satisface las condiciones de Fritz-John.

Demostración: Como \bar{x} es óptimo local para f en Ω , los conos de direcciones de descenso y de restricciones no intersectan: $\mathfrak{R}_{\bar{x}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{x}} = \emptyset$, esto implica que el conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^n / \vec{\nabla} f(\bar{x}) \cdot y < 0, \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) \cdot y < 0 \forall i \in I(\bar{x})\}$$

es vacío. Si aplicamos la forma lineal del teorema de Gordan encontramos que deben existir multiplicadores λ_0, λ_i para $i \in I(\bar{x})$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_0 \vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0,$$

esta es justamente la condición de Fritz-John en el punto \bar{x} .

29.3. Condiciones necesarias de óptimos locales en condiciones de diferenciabilidad - Kuhn-Tucker

Diremos que una solución factible \bar{x} del programa (??) es un *punto regular* cuando el conjunto $\{\vec{\nabla} g_i(\bar{x}) : i \in I(\bar{x})\}$ es linealmente independiente. Es decir cuando los gradientes de las restricciones que se saturan en \bar{x} son un conjunto de vectores linealmente independientes.

29.3.1. Condiciones de Kuhn-Tucker

Una solución factible (regular) $\bar{x} \in \Omega$ satisface las condiciones de Kuhn-Tucker si existen multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ tales que

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0,$$

con $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \forall i = 1, \dots, m$. Observamos que esto es equivalente a la afirmación de que para cada $i \in I(\bar{x})$, existe un multiplicador $\lambda_i \geq 0$ tales que

$$\vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0,$$

29.3.2. Teorema de Kuhn-Tucker

Si $\bar{x} \in \Omega$ es un óptimo local y un punto regular del programa no lineal (??) cuyas funciones f, g_1, \dots, g_m son diferenciables en un dominio común $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, entonces \bar{x} satisface las condiciones de Kuhn-Tucker.

Demostración: Aplicando las condiciones necesarias de Fritz-John, sabemos que hay multiplicadores λ_0, λ_i con $i \in I(\bar{x})$ no todos nulos tales que:

$$\lambda_0 \vec{\nabla} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0,$$

si eventualmente $\lambda_0 = 0$, encontramos que los multiplicadores λ_i con $i \in I(\bar{x})$ definen una familia de coeficientes no todos nulos tales que

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\bar{x}) = 0$$

lo cual contradice la suposición de regularidad en \bar{x} , según la cual los gradientes $\{\vec{\nabla} g_i(\bar{x}); i \in I(\bar{x})\}$ son linealmente independientes, así que debemos aceptar que $\lambda_0 > 0$ y los multiplicadores $\frac{\lambda_i}{\lambda_0}; i \in I(\bar{x})\}$ satisfacen la ecuación de Kuhn-Tucker.

29.4. Problemas con restricciones mixtas

Consideraremos programas no lineales que involucran restricciones de igualdad y desigualdad, dados en la forma general:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{s.a.} \\ & g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

donde $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_k$ son funciones diferenciables definidas en un dominio común $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

29.4.1. Forma general lineal del teorema de Gordan

Supongamos que A es una matriz de dimensión $m \times n$ y B es una matriz de dimensión $k \times n$ con rango k , entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. Existe $y \in \mathbb{R}^n : Ay < 0$ con $By = 0$.
2. Existe $p \geq 0$ en \mathbb{R}^m no nulo y existe $q \in \mathbb{R}^k$ tales que

$$A^t p + B^t q = 0_n,$$

donde 0_n representa el cero en \mathbb{R}^n .

Demostración: Cuando ?? es cierta existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ay < 0_m$ y $By = 0_k$, si $p \geq 0$ en \mathbb{R}^m con $p \neq 0$, tenemos que $p \cdot Ay = A^t p \cdot y < 0$, cuando $q \in \mathbb{R}^k$ tenemos $q \cdot By = B^t q \cdot y = 0$, entonces $A^t p \cdot y + B^t q \cdot y < 0$ siempre que $p \in \mathbb{R}_+^m / \{0_m\}$ y que $q \in \mathbb{R}^k$, por lo tanto no hay ninguna pareja $p \in \mathbb{R}_+^m / \{0_m\}; q \in \mathbb{R}^k$ tal que $A^t p \cdot y + B^t q \cdot y < 0$. Por lo cual ?? no es cierta.

Supongamos que ?? no es cierta, no existe ningún $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ay < 0_m$ con $By = 0_k$. Definimos el conjunto \mathfrak{C} en \mathbb{R}^{m+k} como el conjunto de las $m+k$ tuplas $(z; w) \in \mathbb{R}^{m+k}$ tales que $z > Ay$ y $w = By$ para algún $y \in \mathbb{R}^n$. No es difícil comprobar que \mathfrak{C} es un conjunto convexo. Puesto que ?? no es cierto, no

existe ningún $y \in \mathbb{R}^n : 0_m > Ay$ con $0_k = By$, lo cual significa que $(0_m, 0_k) \notin \mathcal{C}$. Como \mathcal{C} es convexo, existen $p \in \mathbb{R}^m; q \in \mathbb{R}^k$ no simultáneamente nulos tales que

$$p \cdot z + q \cdot w \geq 0 \quad \forall (z; w) \in \mathcal{C}.$$

Tomando $y \in \mathbb{R}^n$; encontramos que $Ay + \bar{\epsilon} > Ay$ donde $\bar{\epsilon} = (\epsilon, \dots, \epsilon) \in \mathbb{R}^m$ con $\epsilon > 0$; por lo tanto:

$$(Ay + \bar{\epsilon}; By) \in \mathcal{C} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

con lo cual

$$p \cdot (Ay + \bar{\epsilon}) + q \cdot By \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

así que

$$p \cdot Ay + \epsilon \sum_{i=1}^m p_i + q \cdot By \geq 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

con y fijo. Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, encontramos

$$p \cdot Ay + q \cdot By \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual es equivalente a

$$A^t p \cdot y + B^t q \cdot y \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

de donde concluimos que $A^t p + B^t q = 0$. Para mostrar que $p \geq 0$ tomamos $Ay + \bar{\epsilon} + re^j$ con $r > 0$ arbitrario, si encontramos:

$$p \cdot Ay + \epsilon \sum_{i=1}^m p_i + rp_j + q \cdot By \geq 0 \quad (29.2)$$

como $r > 0$ es arbitrario $p_j \geq 0$, de lo contrario no siempre sería cierta la desigualdad (??). Si $p = 0$ tenemos $q \cdot By \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}^n$, luego $B^t q \cdot y \geq 0$ así que $B^t q = 0$, como B tiene rango k , concluimos que $q = 0$, como q y p no son simultáneamente nulos concluimos que $p \geq 0$ no puede ser nulo.

29.4.2. El error de aproximación

Capítulo 30

Otras clases de convexidad para funciones

FALTA

Capítulo 31

Principios de dualidad en programación no lineal

FALTA

Capítulo 32

Programación cuadrática

FALTA

Parte IV

Elementos de Optimización Global y Programación Cónica

Capítulo 33

Conos y órdenes parciales

FALTA

Capítulo 34

Conos duales y autoduales

FALTA

Capítulo 35

Problemas de momentos y conos de funciones positivas

FALTA

Capítulo 36

Problemas de momentos clásicos: Hanburger, Stieltjes, Hausdorff y Toeplitz

FALTA

Capítulo 37

Optimización global con distribuciones de probabilidad

FALTA

Capítulo 38

Relajaciones semidefinidas en optimización global

FALTA

Capítulo 39

Programación cónica

FALTA

Capítulo 40

Programación semidefinida

FALTA

Capítulo 41

Dualidad en programación semidefinida

FALTA

Capítulo 42

Métodos de punto interior

FALTA

Capítulo 43

Optimización no suave (ANIA)

La optimización clásica (diferenciable) siempre resulta afín al concepto de la diferenciación. En contraste a ello, la optimización no diferenciable analiza problemas que contienen funciones que no necesariamente deben ser diferenciables. En especial se observan problemas dados en la forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (43.1)$$

donde las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son localmente Lipschitz.

Por no tener la condición de diferenciabilidad es difícil transportar directamente métodos conocidos de la optimización clásica, para resolver problemas del tipo (??).

En la optimización no diferenciable se habla de *solución* del problema (??) cuando se halla un punto estacionario.

En la optimización no diferenciable el concepto de gradiente está ausente, así que se emplea el cálculo de subdiferenciales o subgradientes.

43.1. Elementos de análisis no suave

Se analizan funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que son localmente Lipschitz:

Definición 43.1. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llama localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$, si existe una vecindad $U(x, \varepsilon)$ y una constante $K > 0$ tal que

$$|f(y) - f(z)| \leq K |y - z| \quad (43.2)$$

para todo $y, z \in U(x, \varepsilon)$.

La función f se llama localmente Lipschitz en $M \subset \mathbb{R}^n$, si cumple la condición (??) para todo $x \in M$.

La constante K de la definición ?? se llama *constante de Lipschitz*.

Lema. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Entonces se obtiene:

1. f es continua,
2. f es diferenciable en casi todo \mathbb{R}^n (en el sentido Lebesgue).

Demostración. Véase por ejemplo Mäkelä & Neittaanmäki, Th. 3.2.15. □

Se están tratando funciones, que no son diferenciables. Para obtener una herramienta similar a la del gradiente se introduce el concepto del subdiferencial.

Definición 43.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. El subdiferencial de f en x es el conjunto

$$\partial f(x) := \text{conv}\left\{ \lim_{y_i \rightarrow x} \nabla f(y_i) \mid \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ es una sucesión, tal que } y_i \rightarrow x \text{ y } f \text{ es diferenciable en } y_i \right\}. \quad (43.3)$$

Cada elemento $x_i \in \partial f(x)$ se denomina subgradiente de f en x .

Para el subdiferencial se cumplen las siguientes cualidades:

Lema. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$ con constante de Lipschitz K . Entonces se cumple:

1. $\partial f(x) \neq \emptyset$,
2. $\partial f(x)$ es un conjunto convexo y
3. $\partial f(x)$ es un conjunto compacto con $\partial f(x) \subset B(0, K)$.

Demostración. Véase Mäkelä & Neittaanmäki, Th. 3.1.4. □

Lema. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple:

$$\nabla f(x) \in \partial f(x).$$

Si además f es diferenciable continua en x , se cumple:

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Demostración. Véase Mäkelä & Neittaanmäki, Th. 3.1.7. □

Para poder explicar mejor el concepto del subdiferencial se analizará el siguiente ejemplo:

Ejemplo 43.3. Si se observa la función del valor absoluto en \mathbb{R} ,

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función es localmente Lipschitz. Es diferenciable continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. El subdiferencial de f en 0 está dado por $[-1, 1]$ (v. figura ??).

Figura 43.1: El subdiferencial del valor absoluto en 0.

Debido al lemma ?? es intuitivo encontrar una condición necesaria para hallar minimizadores para funciones no diferenciables.

Proposición 43.4 (Condición necesaria para obtener minimizadores). *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz y tenga un mínimo en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple:*

$$0 \in \partial f(\bar{x}). \quad (43.4)$$

Para demostrar la proposición ?? es necesario introducir primero el concepto de la *derivada direccional generalizada*.

Definición 43.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$f^\circ(x; v) := \limsup_{y \rightarrow x} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \quad (43.5)$$

se llama derivada direccional generalizada de f en x en dirección $v \in \mathbb{R}^n$, para $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

El subdiferencial de (??) se puede representar por medio de la derivada direccional generalizada de la siguiente manera:

$$\partial f(x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid f^\circ(x; v) \geq \xi^T v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \}. \quad (43.6)$$

(V. Clarke , Th. 2.5.1).

Con el concepto de la derivada direccional generalizada se puede hacer la demostración de la proposición ??.

Demostración. Sea \bar{x} un minimizador de f , o sea que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) \geq 0$ para todo $0 < t < \varepsilon$ y $v \in \mathbb{R}^n$.

Para la derivada direccional generalizada se obtiene:

$$\begin{aligned} f^\circ(\bar{x}; v) &= \limsup_{y \rightarrow \bar{x}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \\ &\geq \limsup_{y \rightarrow \bar{x}} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} \\ &\geq 0 \quad (\text{porque } f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) \geq 0 \text{ para } t \text{ suficientemente pequeña y } t \geq 0). \end{aligned}$$

De aquí se obtiene $f^\circ(\bar{x}; v) \geq 0 = 0^T v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Con (??) se obtiene la suposición $0 \in \partial f(\bar{x})$. \square

Cada $x \in \mathbb{R}^n$ que cumple la condición (??) se denomina *punto estacionario* de f .

La condición de la proposición ?? también es suficiente si f es además convexa (v. Mäkelä & Neittaanmäki, Th. 3.1.8).

De aquí en adelante se trabajará con la siguiente premisa:

(AV) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz.

43.2. Algoritmo general

Bajo la premisa se analizará el siguiente problema de optimización no lineal, no restringida:

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

La meta de la optimización no suave es construir un algoritmo, que partiendo de un punto inicial $x_1 \in \mathbb{R}^n$, construya una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$, que converja contra un punto estacionario de f .

Se presentará aquí un algoritmo, que soluciona el problema (P). Servirá como guía, para obtener una estructura general de algoritmos de la optimización no suave. Más adelante se explicarán en detalle cada uno de sus pasos.

ALGORITMO GENERAL (AG)

Para encontrar puntos estacionarios $x^ \in \mathbb{R}^n$ de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que son localmente Lipschitz.*

Paso 0: (Inicialización)

Sea $x_1 \in \mathbb{R}^n$ un vector de partida dado.

Ponga $k = 1$.

Paso 1: (Encuentro de la dirección de búsqueda)

Encuentre $d_k \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$f(x_k + td_k) < f(x_k), \quad \text{para un } t > 0.$$

Paso 2: (Criterio de parada)

Si x_k está *suficientemente cerca* de $x^* \implies$ PARE

Paso 3: (Búsqueda de línea (tamaño del paso))
Encuentre $t_k > 0$, tal que

$$t_k \approx \operatorname{argmin}_{t>0} \{f(x_k + td_k)\}.$$

Paso 4: (Actualización)
Ponga $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$,
 $k = k + 1.$ \implies VAYA A Paso 1.

43.3. Métodos de la optimización no suave

La más grande dificultad en los métodos de la optimización no suave es encontrar una dirección de búsqueda (Paso 1 en (AG)). La idea más natural proveniente de la optimización clásica sería utilizar el gradiente negativo como dirección de búsqueda, como se hace por ejemplo en el método del máximo descenso (véase por ejemplo Horst, Cap. 2.5.1).

El problema es que en la optimización no diferenciable se puede topa con un punto $x_k \in \mathbb{R}^n$ en el cual la función f no es diferenciable. Si se escoge como dirección de búsqueda d_k el negativo de cualquier elemento ξ del subdiferencial $\partial f(x_k)$ en x_k , esta dirección de búsqueda no asegura que en el siguiente paso se llegue a un valor de función más pequeño.

Como ejemplo para aclarar esta situación se puede observar de nuevo la función valor absoluto.

Ejemplo 43.6. En el punto $\bar{x} = 0$ se obtiene $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Si se escoge $\xi = 1 \in \partial f(0)$ y se utiliza su negativo como dirección de búsqueda se obtiene: $f(\bar{x} + td) = f(-t) > f(\bar{x})$ para todo $t > 0$.

Así la siguiente iteración no va a producir una reducción en el valor de f .

En este ejemplo se puede observar además que el criterio para parar (Paso 2 en (AG)) no es muy claro.

Con el siguiente ejemplo se tratará de explicar por qué los métodos clásicos de la optimización no sirven para tratar problemas no diferenciables.

Ejemplo 43.7 (v. Zowe). Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) := \begin{cases} 5(9x^2 + 16y^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } x \geq |y| \\ 9x + 16|y|, & \text{si } 0 < x < |y| \\ 9x + 16|y| - x^9, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

El mínimo se encuentra en $x^* = (-1, 0)^T$.

La función f es convexa. No es diferenciable en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y = 0\}$.

Si se elige un vector inicial en el conjunto $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y| > (\frac{9}{16})^2 |x|\}$, y se aplica el método del máximo descenso con búsqueda de línea exacta, se obtiene una sucesión, que converge contra $\bar{x} = (0, 0)^T$, pero este punto no es estacionario para f .

Para sobrellevar las dificultades presentadas se han desarrollado diferentes teorías. En general los métodos de la optimización no suave se pueden dividir en dos grandes grupos: *Métodos Subgradiente y Métodos Bundle*.

Ambos trabajan con las siguientes premisas:

· (AV)

· en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ es posible calcular $f(x)$ y un elemento *cualquiera* $\xi \in \partial f(x)$ ¹.

43.4. Métodos Subgradiente

La idea de los métodos Subgradiente se basa en las ideas de la optimización clásica. Como dirección de búsqueda se escoge en cada paso el negativo del gradiente o subgradiente (o sea en puntos no diferenciables el negativo de un elemento cualquiera del subdiferencial). Por esto, se trata de métodos que no son de descenso, que en algunos casos convergen muy despacio.

Por la escogencia de la dirección de búsqueda se obtienen dos grandes problemas.

Por un lado es difícil escoger el tamaño del paso (Paso 3 en (AG)) y por el otro es difícil obtener un buen criterio para parar.

La dificultad del tamaño del paso se reconoce en el ejemplo ???. El vector $g_k = (9, 16)^T$ es un elemento del subdiferencial en el punto $x_k = (0, 0)^T$. Pero $-g_k$ no es dirección de descenso, o sea que no existe un $t_k > 0$, tal que se obtenga $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Aunque se escoja otro elemento $\tilde{g}_k \in \partial f(x_k)$, que fuera dirección de descenso, al elegir un t_k según Paso 3 en (AG), se podría llegar a las mismas dificultades que se obtienen con el método del máximo descenso. Por esto se trata de elegir los t_k 's a priori, normalmente como una sucesión que converja a 0. Esto lleva a que la velocidad de convergencia del método sea muy mala, ya que los t_k 's no tienen ninguna relación con la función a tratar.

Si un punto estacionario carece de diferenciabilidad, puede pasar (por la elección aleatoria del elemento del subdiferencial) que el método se lo salte.

Hay varias teorías de cómo se ha tratado de sobrellevar estas dificultades (véase por ejemplo Shor), pero el mayor problema de los métodos Subgradiente es encontrar un buen criterio para parar.

43.5. Métodos Bundle

Los inicios de los métodos Bundle se basan en las ideas del *cutting plane method*, que fueron desarrolladas independientemente por Cheney & Goldstein 1959 y Kelley 1960. El primer método en llamarse *método bundle*, fue el método ε -máximo-descenso de Lemaréchal 1976.

¹En la implementación numérica esta premisa se obtiene utilizando una así llamada "Black-box"

La idea básica de los métodos bundle es empacar en cada iteración la información de los subgradietes de iteraciones anteriores en un haz (bundle). Así se espera obtener buena información local sobre el punto de la iteración, para escoger una buena dirección de búsqueda.

Los métodos Bundle son métodos de descenso, en el sentido

$$f(x_{k+1}) < f(x_k), \quad \forall x_{k+1} \neq x_k \quad \text{en cada iteración } k.$$

Se pasará a describir de manera más detallada los métodos Bundle, ya que en estos momentos son los más prometedores en la optimización no suave.

43.5.1. Estructura general de los métodos Bundle

Para aclarar mejor los métodos Bundle, se supondrá que se tiene un algoritmo que crea una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, que converge contra un punto estacionario x^* de f .

En la k -ésima iteración del algoritmo se tiene además del punto de iteración x_k , unos puntos de prueba y_j , que se obtienen de iteraciones anteriores, además de subgradietes $\xi_j \in \partial f(y_j)$, para $j \in J_k$, en donde $J_k \subset \{1, \dots, k\}$ es un conjunto de índices no vacío, que cumple $k \in J_k$ para todo k^2 .

En sus principios los métodos Bundle se aplicaron a funciones convexas. Se construye una aproximación lineal a la función convexa f desde abajo, por medio de un modelo *cutting-plane*

$$\hat{f}_k(x) := \max_{j \in J_k} \{ f(y_j) + \xi_j^T (x - y_j) \} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (43.7)$$

La función de aproximación \hat{f}_k se puede representar por medio del *error de aproximación*

$$\alpha_j^k := f(x_k) - f(y_j) - \xi_j^T (x_k - y_j) \quad \forall j \in J_k \quad (43.8)$$

de manera equivalente como

$$\hat{f}_k(x) = \max_{j \in J_k} \{ f(x_k) + \xi_j^T (x - x_k) - \alpha_j^k \} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (43.9)$$

43.5.2. El error de aproximación

El error de aproximación α_j^k caracteriza la distancia de la aproximación en y_j por medio de ξ_j a f en x_k . Se quiere asegurar que se cumpla

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{f}_k(x) \leq f(x_k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (43.10)$$

para que \hat{f}_k sea una aproximación desde abajo a f en x_k .

² J_k da informaciones acerca de qué subgradietes de iteraciones anteriores *sirven* para obtener buena información local acerca de x_k . J_k indica el tamaño del haz de subgradietes. Para la composición de J_k existen varios métodos, algunos de los cuales se explicarán más adelante.

La condición (??) se cumple solamente si $\alpha_j^k \geq 0$ para todo $j \in J_k$, porque entonces:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{f}_k(x) &\leq \hat{f}_k(x_k) && \text{(por la definición de mínimo)} \\ &= \max_{j \in J_k} \{ f(x_k) - \alpha_j^k \} && \text{(por (??))} \\ &= f(x_k) - \max_{j \in J_k} \alpha_j^k \\ &\leq f(x_k) && \text{(porque } \alpha_j^k \geq 0 \quad \forall j \in J_k \text{).} \end{aligned}$$

El error de aproximación α_j^k representa qué tan lejos está el subgradiente ξ_j^T de ser elemento del subdiferencial $\partial f(x_k)$.

Lema. Si f es convexa, se cumple para α_j^k de (??) y para todo $j \in J_k$:

$$1. \quad \alpha_j^k \geq 0 \quad \text{y} \quad (43.11)$$

$$2. \quad \text{si } \alpha_j^k = 0 \text{ entonces } \xi_j \in \partial f(x_k). \quad (43.12)$$

Demostración. Si f es convexa, el subdiferencial de f se puede representar de la siguiente manera (v. Clarke , Cor. a la Prop. 2.2.6):

$$\partial f(x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + \xi^T(y - x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1.:

Para $\xi_j \in \partial f(y_j)$ se cumple $f(y) \geq f(y_j) + \xi_j^T(y - y_j)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, más específico $f(x_k) \geq f(y_j) + \xi_j^T(x_k - y_j)$, o sea $\alpha_j^k \geq 0$.

2.:

Se tiene que $\xi_j \in \partial f(y_j)$. Entonces se obtiene para todo $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(y_j) + \xi_j^T(y - y_j) && \forall y \in \mathbb{R}^n \\ f(y_j) &\leq f(y) - \xi_j^T(y - y_j) && \forall y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Sea $\alpha_j^k = 0$. Se cumple entonces:

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(y_j) + \xi_j^T(x_k - y_j) \\ \Leftrightarrow f(x_k) - \xi_j^T(x_k - y_j) &= f(y_j) \\ \Leftrightarrow f(x_k) + \xi_j^T(y_j - x_k) &= f(y_j) \\ \Leftrightarrow f(x_k) + \xi_j^T(y_j - x_k) &\leq f(y) - \xi_j^T(y - y_j) && \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow f(x_k) + \xi_j^T(y_j - y_j) + \xi_j^T(y - x_k) &\leq f(y) && \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow f(x_k) + \xi_j^T(y - x_k) &\leq f(y) && \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow \xi_j &\in \partial f(x_k). \end{aligned}$$

□

En el caso no convexo, el error de aproximación α_j^k de (??) no tiene que ser necesariamente positivo. Por eso es necesario modificar α_j^k , para que se sigan cumpliendo las cualidades (??) y (??). De esta manera el modelo de aproximación de (??) continuaría siendo una aproximación a f en el punto x_k desde abajo.

En lo que sigue se describirán dos estrategias, para modificar α_j^k en funciones no convexas: *Subgradient Locality Measure* y *Subgradient Deletion*. Estas estrategias se describen por ejemplo en Kiwiel .

Subgradient Locality Measure

La estrategia de la Subgradient Locality Measure trata de ponerle un peso a los subgradientes. Por medio del error de aproximación α_j^k se trata que en la aproximación \hat{f}_k en f sólo se tengan en cuenta subgradientes $\xi_j \in \partial f(y_j)$ de puntos de prueba y_j que no estén demasiado lejos de x_k . Con esto la aproximación resulta muy buena desde el punto de vista local. El error de aproximación α_j^k se reemplaza por

$$\tilde{\alpha}_j^k := \max\{|\alpha_j^k|, \gamma|x_k - y_j|^2\},$$

donde $\gamma > 0$ es un parámetro dado (si f es convexa, se exige $\gamma = 0$).

Para no tener que ir grabando todos los puntos de prueba y_j , se introduce una *medida de distancia* (*distance measure*) s_j^k :

$$s_j^k := |x_j - y_j| + \sum_{i=j}^{k-1} |x_{i+1} - x_i| \quad \forall i < k, \quad (43.13a)$$

$$s_k^k := |x_k - y_k|. \quad (43.13b)$$

Después de cada iteración se actualiza según la siguiente regla:

$$s_j^{k+1} := s_j^k + |x_{k+1} - x_k|.$$

Así el error de aproximación α_j^k se reemplaza por el *peso*

$$\beta_j^k := \max\{|\alpha_j^k|, \gamma(s_j^k)^2\}, \quad (43.14)$$

que especifica qué tan lejos está $\xi_j \in \partial f(y_j)$ de $\partial f(x_k)$. Así se obtiene en la aproximación

$$\hat{f}_k(x) = \max_{j \in J_k} \{f(x_k) + \xi_j^T(x - x_k) - \beta_j^k\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (43.15)$$

que los subgradientes de puntos cercanos a x_k tienen más peso. Porque si y_j se encuentra lejano a x_k , se obtiene $\beta_j^k = \gamma|x_k - y_j|^2$. Este dato no tendrá mayor importancia en la aproximación \hat{f}_k , porque entonces el valor de $f(x_k) + \xi_j^T(x - x_k) - \beta_j^k$ para este j será bastante pequeño y será entonces irrelevante para \hat{f}_k .

Subgradient Deletion

En la estrategia de la Subgradient Locality Measure no siempre es fácil encontrar un $\gamma > 0$, que no sea demasiado grande para trascurar algunos puntos de prueba y_j que están cercanos de x_k . Por eso la estrategia de Subgradient Deletion reemplaza el error de aproximación α_j^k por

$$\hat{\beta}_j^k := |\alpha_j^k|. \quad (43.16)$$

Es importante introducir una regla de *deletion* (*deletion rule*). Para esto se utiliza una regla de actualización que borra la información de subgradien-tes innecesarios.

Si en la k -ésima iteración la dirección de búsqueda encontrada d_k (Paso 1 in (AG)) cumple la condición

$$\|d_k\| \leq m_s \max_{j \in J_k} \{s_j^k\} \quad (43.17)$$

(donde m_s es un parámetro para resetear dado), el conjunto de índices J_k se modificará para el siguiente paso³. Así se obtiene que no todos los subgradien-tes de iteraciones pasadas se toman en cuenta, para evitar que éstos posiblemente empeoren la aproximación \hat{f}_k de manera local.

Para seguir explicando la estructura general de los método Bundle, se pre-sume aquí que el error de aproximación α_j^k se haya modificado por una de las estrategias presentadas, para que se cumplan las condiciones (??) y (??).

43.5.3. Dirección de Búsqueda

Para encontrar una dirección de búsqueda adecuada (Paso 1 en (AG)) se observa el siguiente modelo:

$$d_k := \operatorname{argmin}_{d \in \mathbb{R}^n} \left\{ \hat{f}_k(x_k + d) + \frac{1}{2} d^T M_k d \right\}, \quad (43.18)$$

donde $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica. La función de la matriz M_k es dar informaciones acerca de la curvatura de f en una vecindad de x_k . El término cuadrático $\frac{1}{2} d^T M_k d$ está para garantizar la existencia de una solución d_k y para mantener localmente buena la aproximación.

El problema (??) sigue siendo no suave. Debido a su estructura lineal seg-mentaria se puede escribir como un problema cuadrático (suave):

$$(QP) \quad \min_{- \alpha_j^k + \xi_j^T d \leq v \quad \forall j \in J_k} v + \frac{1}{2} d^T M_k d.$$

La elección de la matriz M_k varía en los diferentes métodos Bundle.

El método cutting-plane de Kelley y de Cheney & Goldstein escoge $M_k \equiv 0$. Así (QP) es un problema lineal y en general fácil de solucionar. Un problema que surge es que (QP) no necesariamente deba tener un mínimo finito.

³Detalles para la modificación específica de J_k se encuentra en Kiwiel, Cap. 4 (p. 139ff)

El método ε -máximo-descenso de Lemaréchal escoge $M_k \equiv I_n$. En este método es de suma importancia la ε_k -esfera. En cada punto x_k se elige un ε_k que quiere garantizar que en $B(x_k, \varepsilon_k)$ la función $\hat{f}_k(x)$ sea una buena aproximación a $f(x)$ para todo $x \in B(x_k, \varepsilon_k)$. El mayor problema en este método es encontrar reglas convergentes para la actualización en cada iteración de los ε_k .

Una buena descripción de los diferentes métodos Bundle se encuentra en Mäkelä & Neittaanmäki.

43.5.4. Búsqueda de línea y criterio para parar

En los métodos Bundle el concepto de *pasos importantes* (*serious steps*) y *pasos cero* (*null steps*) es bastante importante. Si en un punto x_k se encuentra no diferenciabilidad, es posible que la dirección de búsqueda encontrada d_k no garantice descenso. Por lo tanto se quisiera avanzar *muy poco nada* en esa dirección. Para eso se utiliza un paso cero. Un paso cero no va a cambiar el valor de la función, pero garantiza un cambio en la dirección de búsqueda d_{k+1} .

En la búsqueda de línea se buscan tamaños de paso t_L^k , t_R^k , tal que se obtenga $0 \leq t_L^k \leq t_R^k \leq 1$ y que $x_{k+1} := x_k + t_L^k d_k$ cumpla la condición

$$(L1) \quad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + m_L t_L^k \nu_k,$$

donde $m_L \in (0, \frac{1}{2})$ es un parámetro dado y $\nu_k := \hat{f}_k(y_{k+1}) - f(x_k)$ es el *esperado descenso*. En el siguiente paso se pone entonces $y_{k+1} := x_k + t_R^k d_k$.

Se habla de un *paso importante*, si se encuentra $t_L^k > 0$. Entonces se pone $t_R^k = t_L^k$ y así se obtiene $y_{k+1} = x_{k+1}$.

Se habla de un *paso cero*, si se encuentra $t_L^k = 0$. Entonces se pone $t_R^k > t_L^k$ y se obtiene $x_{k+1} = x_k$.

En ambos casos el siguiente subgradiente ξ_{k+1} se elige del subdiferencial $\partial f(y_{k+1})$.

En los pasos cero no se busca mejorar el valor de la función. Se trata de mejorar la aproximación \hat{f}_{k+1} . Esto se asegura porque en cada paso se garantiza que $k \in J_k$ y que el subgradiente siguiente ξ_{k+1} se elige de $\partial f(y_{k+1})$ con la condición de que $y_{k+1} \neq x_{k+1}$.

El criterio para parar se cumple si $\nu_k \geq -\varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro de exactitud dado.

Se cumple $\nu_k \leq 0$ para todo k , porque $\hat{f}_k(x) \leq f(x_k)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (véase (??)). Si $\nu_k = 0$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k(y_{k+1}) &= f(x_k) + \max_{j \in J_k} \{ \xi_j^T (y_{k+1} - x_k) - f(x_k) + f(y_j) + \xi_j^T (x_k - y_j) \} \\ &\quad \text{(por (??))} \\ &= f(x_k) \quad \text{(por definición de } \nu_k) \\ \iff f(x_k) &= \max_{j \in J_k} \{ \xi_j^T (y_{k+1} - x_k) + f(y_j) + \xi_j^T (x_k - y_j) \} \\ &= \max_{j \in J_k} \{ \xi_j^T (y_{k+1} - y_j) + f(y_j) \} = \hat{f}_k(y_{k+1}). \end{aligned}$$

Esta demostración sólo es válida, si \hat{f}_k está definida como en (??), en especial

cuando f es convexa. Si f no es convexa, hay que tener en cuenta la modificación específica del error de aproximación.

43.5.5. La elección del conjunto de índices J_k

Si en cada iteración se cumpliera $J_k = \{1, \dots, k\}$, se tendrían bastantes problemas en la implementación numérica del algoritmo en dimensiones grandes. Por eso es importante la elección del conjunto de índices J_k . Cuantos más índices contenga J_k , mejor será la aproximación $\hat{f}_k(x)$ a $f(x_k)$. Pero para esta aproximación sólo son relevantes los índices de puntos de prueba y_j , que estén *cercanos* a x_k . Los puntos de prueba y_j , que estén *demasiado lejos* de x_k , no interesan, ya que sus respectivos subgradientes no indican nada acerca del subdiferencial en x_k y además de pronto empeorarían la aproximación de manera local. Para aclarar este concepto se propondrá el siguiente ejemplo:

Ejemplo 43.8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función es convexa y el subdiferencial está dado por

$$\partial f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x > 0 \\ [-1, 0], & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Si se observa el punto $x_k = -1$ con $J_k = \{1, 2\}$ y los puntos de prueba $y_1 = 2, y_2 = 1$, se reconoce que la aproximación respectiva $\hat{f}_k(x)$ es localmente bastante mala (v. fig. ??):

$$\hat{f}_k(x) = \begin{cases} 4x - 4, & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ 2x - 1, & \text{si } x \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Este hecho se debe a que los puntos de prueba están bastante lejos de x_k .

Si se eligen en cambio los puntos de prueba $y_1 = 0, y_2 = -2$, se obtiene que $\hat{f}_k(x)$ (si en el punto $y_1 = 0$ se toma como subgradiente el elemento $\xi_1 = 0$) como:

$$\hat{f}_k(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Esta aproximación es localmente igual a la función f (v. fig. ??).

La elección de los índices para J_k está conectada con el error de aproximación α_j^k . Éste había sido elegido de tal manera que ofreciera informaciones acerca de qué tan importante es el subgradiente para la iteración respectiva. Kiwiel introdujo en los conceptos *Subgradient Aggregation* y (*Subgradient Selection*). Para una mejor descripción véase Kiwiel

Figura 43.2: *Aproximación a f con los puntos de prueba $y_1 = 2, y_2 = 1$.*

Figura 43.3: *Aproximación a f con los puntos de prueba $y_1 = 0, y_2 = -2$.*

Bibliografía

- [1] Fourer, R., Gay, D.M. & Kernighan, B. W., *AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming, Second Edition*, Thomson, 2003.
- [2] BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (1993) *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc.
- [3] CHENEY, E.W.; GOLDSTEIN, A.A. (1959) *Newton's Method for Convex Programming and Tchebycheff Approximation*, Numerische Mathematik, **1**, S. 253-268.
- [4] CLARKE, F.H. (1983) *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Classics in applied mathematics, **5**, Wiley, New York.
- [5] FLETCHER, R. (1987) *Practical Methods of Optimization*, Wiley & Sons, Chichester.
- [6] HIRIART-URRUTY, J.-B.; LEMARECHAL, C. (1993) *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer, Berlin.
- [7] HOCK, W., SCHITTKOWSKI, K. (1981) *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **187**, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] HORST, R. (1979) *Nichtlineare Optimierung*, Carl Hanser Verlag, München-Wien.
- [9] KELLEY, J.E. (1960) *The cutting plane method for solving convex programs*, SIAM J., **8**, S. 703-712.
- [10] KIWIEL, K.C. (1985) *Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.
- [11] LEMARÉCHAL, C. (1976) *Combining Kelley's and conjugate gradient methods*, Abstracts of IX International Symposium on Mathematical Programming, Budapest.
- [12] LEMARÉCHAL, C. (1989) *Nondifferentiable optimization*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Hrsg. Nemhauser, G. L.; Rinnooy Kan, A. H. G.; Todd, M. J., Vol. **1**, Elsevier Science Publishers B. V.

- [13] LEMARÉCHAL, C.; ZOWE, J. (1994) *A Condensed Introduction to Bundel Methods in Nonsmooth Optimization*, Algorithms for Continuous Optimization, Hrsg. Emilio Spedicato, Kluwer Academic Press.
- [14] LUKŠAN, L.; VLČEK, J. (1998) *A Bundel-Newton Method for Nonsmooth Unconstrained Minimization*, Mathematical Programming, **83**, S. 373-391
- [15] MCCORMICK, G.P. (1983) *Nonlinear Programming*, John Wiley & Sons, Inc.
- [16] SHOR, N.Z. (1985) *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer Series in Computational Mathematics, **3**, Springer-Verlag Berlin.
- [17] ZOWE, J. (1985) *Nondifferentiable Optimization*, Computational Mathematical Programming, Hrsg. Schittkowski K, Springer-Verlag Berlin, S. 323-356.