

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS DESDE UNA PERSPECTIVA MATEMÁTICA

ERNESTO ARANDA

Índice

1. Introducción	1
1.1. Ejemplo	2
2. Formulación variacional de problemas de contorno	4
2.1. Elementos matemáticos del MEF	5
2.2. Formulaciones variacionales	7
2.3. Resultados abstractos para formulaciones variacionales	9
3. Método de Ritz-Galerkin	10
4. Espacios de elementos finitos	11
4.1. Construcción de bases de elementos finitos	12
4.1.1. Ejemplos de elementos finitos	13
4.2. Cálculo de la matriz de rigidez	15
5. Estimaciones del error	17
6. Ejemplo numérico	18

SECCIÓN 1

Introducción

El método de los elementos finitos (en adelante, MEF) es un método numérico que fue inicialmente diseñado para resolver problemas de ingeniería y física matemática (análisis estructural, transferencia de calor, fluidos, transporte de masa, electromagnetismo, . . .) y que en la actualidad presenta aplicaciones en muchos otros campos, tales como la biomecánica, geología, etc. En esencia, el MEF es un método que permite aproximar numéricamente la solución de ecuaciones diferenciales, y ecuaciones en derivadas parciales. Es bien conocido

que, salvo casos muy particulares, la obtención analítica de soluciones de tales ecuaciones es imposible, y la única posibilidad que nos queda es obtener soluciones aproximadas.

Para ello, el MEF basa su filosofía de trabajo en *divide y vencerás*. La idea esencial consiste en dividir el dominio, recinto, o cuerpo sobre el que se trabaja en subdivisiones más pequeñas (elementos), y tratar de formular el problema en cada uno de estos elementos en términos de ecuaciones más sencillas. Posteriormente se ensambla la información proveniente de cada elemento, llegándose a un sistema de ecuaciones algebraicas cuya solución debe proporcionar la aproximación buscada. En concreto, la solución del sistema algebraico obtenido (en los casos habituales, un sistema lineal) proporciona el valor aproximado de la solución en un conjunto de puntos (llamados **nodos**), asociados a la subdivisión del dominio realizada.

En estas notas pretendemos hacer un acercamiento al MEF desde un punto de vista matemático, el cual permite llevar a cabo un tratamiento genérico en una amplia gama de situaciones, que abarca las áreas antes mencionadas. Aparte de la sistematización que representa este enfoque, se pueden obtener además acotaciones del error cometido en la aproximación, hecho de suma importancia en todo método numérico.

Para empezar a entender el funcionamiento del método, presentamos un sencillo ejemplo en elasticidad lineal unidimensional, que sigue el enfoque ingenieril del MEF.

Ejemplo

Consideremos un elemento de barra elástica sujeta a tensiones longitudinales constantes en sus extremos. El objetivo del estudio es encontrar el desplazamiento sufrido por la misma en los extremos, tras la aplicación de dichas fuerzas (véase la Figura 1). Usando la ley de Hooke, que relaciona las tensiones y los desplazamientos tendremos:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

donde σ representa la tensión, ε el esfuerzo, E es el módulo de elasticidad y u el desplazamiento. Por otra parte, del equilibrio de fuerzas tenemos que

$$A\sigma = T$$

donde A es el área de la sección de la barra. Sustituyendo en esta última se obtiene

$$A\sigma = AE \frac{du}{dx} = T \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) = 0,$$

que corresponde a la ecuación de la elasticidad en dimensión uno.

Nuestro objetivo es encontrar los desplazamientos, en función de las tensiones. Para ello, supondremos que el desplazamiento es una función lineal, del tipo $u(x) = a + bx$. Si la barra

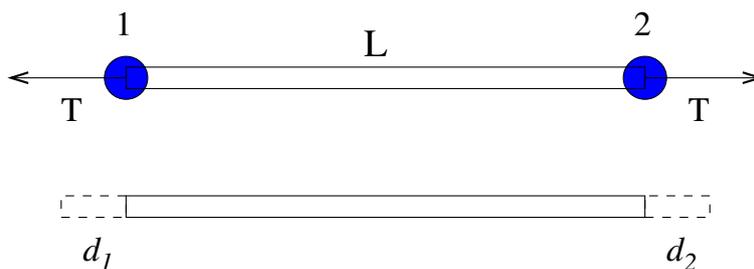


Figura 1. Deformación de una barra elástica.

tiene una longitud L y situamos sus extremos en los del intervalo $(0, L)$, entonces debemos tener $u(0) = d_1$ y $u(L) = d_2$. De aquí es fácil obtener

$$u(x) = \left(\frac{d_2 - d_1}{L} \right) x + d_1,$$

que en versión matricial puede expresarse como

$$u(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad \text{con } \phi_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad \phi_2 = \frac{x}{L}$$

Nótese que la elección de un desplazamiento lineal es arbitraria (podríamos haber escogido otra situación, por ejemplo un polinomio de grado dos o superior). Por otra parte, la expresión matricial de u en términos de las funciones ϕ_1 , ϕ_2 es interesante. Obsérvese que ϕ_1 es la función lineal que vale 1 en $x = 0$ y 0 en $x = L$, mientras que ϕ_2 vale 0 en $x = 0$ y 1 en $x = L$. Volveremos sobre esta observación más adelante.

A través de las relaciones tensión-desplazamiento se tiene:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{d_2 - d_1}{L} \Rightarrow T = AE \frac{d_2 - d_1}{L}$$

Si denotamos por f_1 y f_2 a las fuerzas que actúan en los extremos, esto es, $f_1 = -T$, $f_2 = T$, se obtiene finalmente

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = \frac{AE}{L}(d_1 - d_2) \\ f_2 = \frac{AE}{L}(d_2 - d_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

A la matriz del sistema anterior se le conoce como **matriz de rigidez** del elemento. Resolviendo este sistema, encontraremos los desplazamientos buscados.

Supongamos ahora que tenemos una barra formada por varios elementos (para nuestro ejemplo, dos serán suficientes). Podemos suponer que cada uno de los elementos tiene parámetros diferentes, de manera que, usando el sistema anterior en cada elemento tendremos:

$$\text{Elemento 1:} \quad \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{L^{(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Elemento 2: } \begin{pmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{L^{(2)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

Puesto que ambos elementos están conectados en el nodo 2, la compatibilidad entre ambos elementos sugiere que $d_2^{(1)} = d_2^{(2)} = d_2$. Del mismo modo, el equilibrio de fuerzas en cada nodo da lugar a $F_2 = f_2^{(1)} + f_2^{(2)}$. Denotando por

$$d_1^{(1)} = d_1, \quad d_3^{(2)} = d_3, \quad f_1^{(1)} = F_1, \quad f_3^{(2)} = F_3, \quad C_i = \frac{A^{(i)}E^{(i)}}{L^{(i)}},$$

llegamos al sistema

$$\begin{aligned} F_1 &= C_1(d_1 - d_2) \\ F_2 &= C_1(d_2 - d_1) + C_2(d_2 - d_3) \\ F_3 &= C_2(d_3 - d_2) \end{aligned}$$

que en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & -C_1 & 0 \\ -C_1 & C_1 + C_2 & -C_2 \\ 0 & -C_2 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

De esta forma hemos ensamblado las matrices de ambos elementos, obteniendo la matriz de rigidez para el sistema.

Este esquema, llevado a cabo para dos elementos, puede generalizarse sin mayores problemas a un número mayor de elementos. El MEF actúa esencialmente de esta forma: una vez dividido el dominio en elementos, imponemos las condiciones sobre cada elemento, luego las condiciones de compatibilidad entre todos ellos, y de todo ello resulta un sistema global para el problema.

Nótese también una peculiaridad interesante del método. Puesto que sobre cada elemento sólo intervienen los desplazamientos de sus nodos, y la conexión entre elementos es escasa (es decir, un único nodo sólo está en dos elementos), en cada ecuación aparecerán muy pocos nodos, lo que significa que la matriz de rigidez será una matriz con muchos ceros (**hueca**).

SECCIÓN 2

Formulación variacional de problemas de contorno

Para poder abordar los mecanismos matemáticos que conducen a la formulación del MEF es necesario usar algunas herramientas matemáticas que presentamos a continuación.

Elementos matemáticos del MEF

Espacios L^p

Definimos el espacio de funciones p -integrables del siguiente modo:

$$L^p(\Omega) = \{f \text{ medible: } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

Estos espacios tienen sentido, como se puede ver con la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x}$, en $\Omega = (1, +\infty)$. Nótese que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty, \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = 1,$$

es decir $\frac{1}{x} \in L^2(1, +\infty)$ pero $\frac{1}{x} \notin L^1(1, +\infty)$.

En realidad, un elemento de L^p es algo un poco más complejo. No se tratan de funciones sino de *clases de funciones*, esto es, una especie de familias de funciones, de manera que dos elementos están en la misma clase si toman los mismos valores, excepto en un conjunto de medida nula. Por ejemplo, en $(1, +\infty)$, las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

son esencialmente la misma. A efectos de integración, da igual usar una u otra, lo que significa que como objetos de $L^2(1, +\infty)$ son el mismo.

Derivadas débiles

Echemos un vistazo a la siguiente ecuación diferencial:

$$u'(x)^2 = 1, \text{ en } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

No es difícil encontrar una posible solución (hay infinitas):

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 - x & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad (1)$$

Sin embargo, ¿es realmente una solución? En el sentido *clásico* no, puesto que se trata de una función no derivable, luego no puede ser solución de una ecuación en la que aparece u' . De hecho, no existen funciones C^1 que satisfagan la ecuación. Ante esta situación cabe preguntarse si no sería más conveniente permitir soluciones no tan exigentes. En esa línea se introduce el concepto de derivada débil.

En primer lugar se define el espacio de las funciones test:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } v \text{ es compacto en } \Omega\}$$

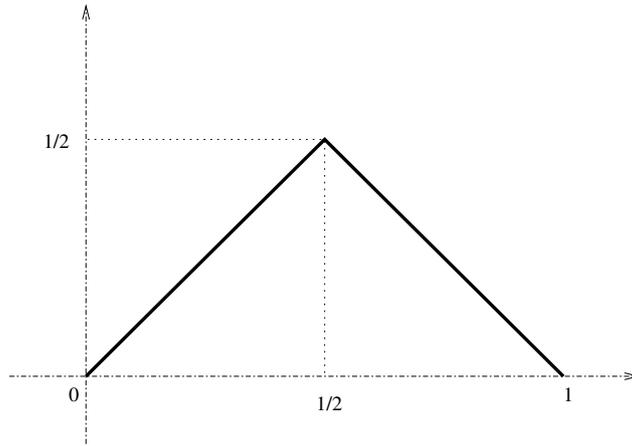


Figura 2. Representación gráfica de la función $u(x)$ de (1).

Entonces se dice que g es la **derivada en el sentido débil** de f si

$$\int_{\Omega} f v' dx = - \int_{\Omega} g v dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2)$$

Nótese que si f es derivable, la fórmula de integración por partes proporciona:

$$\int_{\Omega} f v' dx = f v|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} f' v dx = - \int_{\Omega} f' v dx$$

pues $v = 0$ en $\partial\Omega$. Es decir, $g = f'$. Sin embargo, la expresión (2) puede verificarse aunque f no sea ni tan siquiera continua (sólo es preciso que sea integrable, esto es de L^1).

El concepto puede extenderse a la derivación de cualquier orden, para funciones de varias variables:

$$\int_{\Omega} f \partial^{\alpha} v = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f v$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y $\partial^{\alpha} f = \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Espacios de Sobolev

Como extensión natural de los espacios L^p se define

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega)\}$$

con $m \leq |\alpha|$. En particular, el espacio más usado es $W^{m,2}(\Omega)$ que se denota como $H^m(\Omega)$. Otro espacio que se usa con mucha frecuencia es

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Fórmula de integración por partes

El teorema de Green clásico o fórmula de la divergencia sigue siendo cierto en el sentido débil, y admite la siguiente formulación:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Omega} \Delta u v$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ es la derivada normal y Δu el operador de Laplace, esto es, $\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

Normas en los espacios L^p y H^m

Se definen las normas (esto es, una forma de medir las funciones) siguientes:
en $L^2(\Omega)$:

$$\|u\|_0 = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2};$$

en H^m :

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0.$$

Existe también una seminorma en estos espacios definida por

$$|u|_m = \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_0.$$

Formulaciones variacionales

El uso de derivadas débiles nos permite plantear las ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales de una forma particular. Veamos algunos ejemplos:

Dado el problema de Laplace con condiciones tipo Dirichlet (homogéneas)

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{en } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{array} \right\}$$

si multiplicamos por una función v todo lo regular que queramos, que además cumpla la condición en la frontera, por ejemplo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, y luego integramos y usamos la fórmula de integración por partes obtenemos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} f v,$$

pero como v es nula en la frontera queda

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sin embargo, en esta formulación no es necesario prácticamente ninguna regularidad sobre u , v ó f . Es decir, simplemente bastaría con pedir que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Ésta es la formulación débil del problema de Laplace.

En notación habitual se considera una aplicación (en realidad se trata de una forma bilineal)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

y una aplicación lineal

$$L(v) = \int_{\Omega} f v$$

de manera que el problema variacional se escribe

$$\begin{aligned} \text{Hallar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{PV}$$

donde en este caso $V = H_0^1(\Omega)$.

Este ejemplo se puede extender fácilmente a ecuaciones más complejas

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f \quad \text{en } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

que se ajusta a la formulación dada en (PV) si ponemos

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\Omega} a_0 u v, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v$$

para funciones $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, y $V = H_0^1(\Omega)$.

Para diferentes condiciones en la frontera, la formulación variacional cambia sustancialmente. Dado el problema siguiente con condiciones tipo Neumann

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \right\}$$

multiplicando por $u \in H^1(\Omega)$ e integrando por partes se llega a

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} f v$$

y usando la condición frontera nos lleva al problema (PV) para

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv), \quad L(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} g v,$$

con $V = H^1(\Omega)$.

Nótese que en los dos primeros ejemplos, la condición frontera aparece inmersa en el espacio donde buscamos la solución, mientras que en este último, dicha condición forma parte de la expresión integral. Algo similar sucede si consideramos condiciones Dirichlet no homogéneas. Dado el problema

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= u_0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \right\}$$

su formulación variacional resulta la correspondiente al problema (PV) para

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v - a(u_0, v).$$

para $V \in H_0^1(\Omega)$.

Finalmente, para el problema de elasticidad con condiciones mixtas

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)) &= f_i && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \Gamma_0 \\ \sum_j \sigma_{ij}(u) \cdot n_j &= g_i && \text{en } \Gamma_1 \end{aligned} \right\}$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$ es la deformación elástica,

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

es el tensor de deformación linealizado y $\sigma_{ij}(u) = \sum_{k,l} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u)$ es el tensor de esfuerzos.

Se supone además que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, con $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Para este problema, la formulación variacional corresponde a

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v), \quad L(v) = \sum_i \left(\int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \right)$$

para $V = \{v \in H^1(\Omega)^3 : v_i|_{\Gamma_0} = 0\}$.

En conclusión, hemos asociado a todo problema diferencial una formulación variacional que extiende el concepto de derivación, permitiendo a funciones menos exigentes ser solución de estos problemas. No obstante, se puede demostrar que si la solución del problema variacional correspondiente tiene la regularidad pedida para la ecuación original, se trata entonces de la solución clásica del mismo.

Resultados abstractos para formulaciones variacionales

Todas las formulaciones variacionales anteriores se encuentran enmarcadas en el resultado que expresamos a continuación:

Lema de Lax-Milgram: Dado el problema (PV) , si V es un espacio de Hilbert, a una forma bilineal continua y coerciva y L es lineal y continua, entonces existe una única solución de (PV) . Si además a es simétrica, entonces la solución es el minimizador global de la función

$$f(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u). \quad (3)$$

Definiciones:

a es **continua** si $|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V$.

a se dice **coerciva** si $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \forall u \in V$.

a es **simétrica** si $a(u, v) = a(v, u), \forall u, v \in V$.

L es **continua** si $|L(v)| \leq \gamma \|v\|_V$.

Por supuesto, para problemas variacionales que no se adaptan a las condiciones descritas en el lema de Lax-Milgram existen otro tipo de resultados que quedan al margen de estas notas.

En cualquier caso es importante resaltar que el uso del método de los elementos finitos precisa, para su correcta utilización, de algún resultado de existencia y unicidad de la formulación variacional subyacente. En caso contrario, y esto ocurre con frecuencia con las aplicaciones prácticas, no tenemos garantía de que la solución numerica que proporciona el método sea realmente una aproximación a la solución de nuestro problema.

SECCIÓN 3

Método de Ritz-Galerkin

En esta sección estudiaremos la aproximación de problemas variacionales como los tratados en la sección anterior. En primer lugar trataremos el caso de una forma bilineal simétrica mediante la minimización del funcional f dado en (3). Para ello usaremos el conocido como **método de Ritz**.

La idea es construir una sucesión de espacios vectoriales de dimensión finita, $V_h \subset V$, de manera que $\lim_{h \rightarrow 0} \dim(V_h) = +\infty$ y resolver los problemas aproximados

$$\min_{u \in V_h} f(u) \longrightarrow u_h \quad (MV_h)$$

Nótese que este problema va a tener solución, pues estamos en las condiciones del lema de Lax-Milgram.

El hecho de que V_h sea un espacio de dimensión finita nos permite construir una base de funciones $\{\phi_i\}_i$, de manera que si $u \in V_h$ entonces $u = \sum_i \alpha_i \phi_i$, de modo que

$$f(u) = \frac{1}{2}a\left(\sum_i \alpha_i \phi_i, \sum_j \alpha_j \phi_j\right) - L\left(\sum_i \alpha_i \phi_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j a(\phi_i, \phi_j) - \sum_i \alpha_i L(\phi_i)$$

Definiendo la matriz K , tal que $K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ y el vector G tal que $G_i = L(\phi_i)$, el problema (MV_h) será

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T K \mathbf{x} - G \mathbf{x}$$

que se trata de un problema de optimización finito dimensional. Más aun, K es simétrica y definida positiva debido a la simetría y coercividad de a . Por otra parte, las condiciones de optimalidad aseguran que el mínimo de (MV_h) se alcanza en el vector \mathbf{x} que resuelve

$$K \mathbf{x} = G. \quad (4)$$

Si por el contrario a no es simétrica, entonces la solución de

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } u \in V_h \text{ tal que} \\ &a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h, \end{aligned} \quad (PV_h)$$

se puede buscar usando nuevamente la base de V_h . Es decir, buscamos $u = \sum_i \alpha_i \phi_i$ tal que

$$a\left(\sum_i \alpha_i \phi_i, \phi_j\right) = L(\phi_j), \quad \forall j$$

que justamente es equivalente a (4). Esto se conoce como el **método de Galerkin**.

Nótese que el sistema (4) depende de la base escogida, pero no así la solución obtenida, que lógicamente será siempre la misma. Eso significa que si elegimos apropiadamente la base, podemos obtener un sistema más fácil de resolver que si escogamos una base cualquiera. Ése es el fundamento del método de los elementos finitos, tal y como veremos en la siguiente sección.

Por último comentar que el hecho de que la matriz de rigidez del sistema sea definida positiva (y simétrica en la mayoría de los casos) permite la utilización de numerosos métodos numéricos de resolución de tales sistemas, especialmente diseñados para ese tipo de matrices.

SECCIÓN 4

Espacios de elementos finitos

El MEF consiste en la aplicación del método de Ritz-Galerkin usando como base de los espacios V_h funciones continuas, polinomiales a trozos y con soporte “pequeño”.

Para poder obtener estas funciones será preciso en primer lugar elegir un **mallado** o **triangulación** del dominio Ω . De forma general, podemos dividir un dominio del plano en triángulos o rectángulos, y los dominios del espacio en tetraedros o paralelepípedos. Cada uno de estos polígonos o poliedros se denomina **elemento** (véase la Figura 3). Sobre el mallado seleccionado escogemos un conjunto de puntos o **nodos** asociados con los elementos, que pueden ser vértices de los mismos, estar sobre las aristas o caras o incluso en el interior de los mismos.

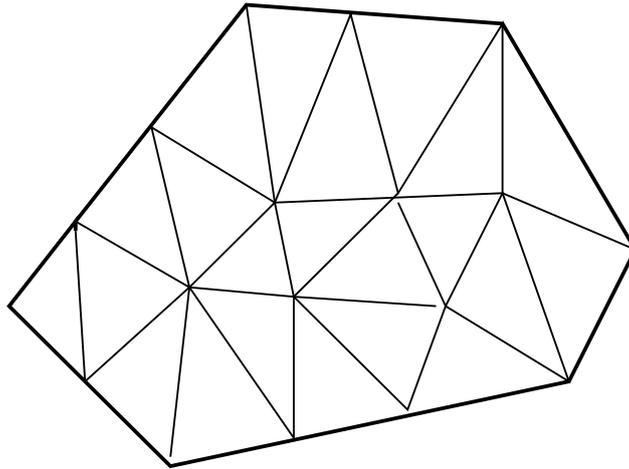


Figura 3. Ejemplo de mallado sobre dominio poligonal.

El concepto de mallado equivale a seleccionar elementos y nodos, y supone la parte más delicada del proceso, pues la construcción de la matriz de rigidez y el segundo miembro dependen en gran medida del mallado escogido. Como normas generales podemos destacar:

(I) el aspecto de los elementos debe ser regular, es decir, no tomar elementos que tengan ángulos muy pequeños. Veremos su influencia en el estudio del error.

(II) el mallado debe ser más fino en las zonas en la que puede haber un cambio súbito del valor de la solución o su derivada.¹

(III) cuanto más fino sea el mallado, mayor debería ser la precisión obtenida, aunque habrá que tener en cuenta la regularidad de la solución.

(IV) la reordenación de los nodos puede tener consecuencias importantes en la resolución de (4).

Construcción de bases de elementos finitos

Dado el mallado, esto es, $\tau_h = \{T_j\}_j$ tal que $\bigcup_j T_j = \overline{\Omega}$,² consideramos un espacio de funciones

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_k\}$$

donde \mathbb{P}_k son polinomios de grado k . Se trata de escoger m y k para que $X_h \subset H^l(\Omega)$. Este tipo de espacios X_h tiene dimensión finita y se trata de que el mallado (dependiente de un parámetro h) haga que $\lim_{h \rightarrow 0} \dim(X_h) = +\infty$.

¹En algunas situaciones, una vez conocida la solución en un mallado, podemos volver a realizar un remallado que se adapte a tales zonas conflictivas.

²Además el mallado debe satisfacer que $\text{int}(T_i) \neq \emptyset, \forall i$ y $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset, i \neq j$.

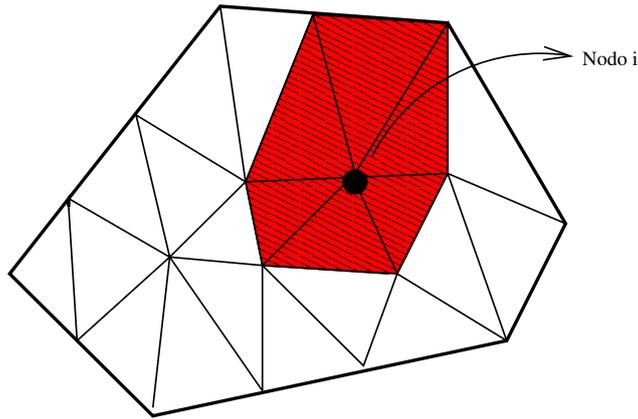


Figura 4. Soporte de la función base ϕ_i .

Asociado a este mallado, escogemos un conjunto de nodos $\{N_i\}_i$ que permita la *unisolvencia*, esto es, que las funciones base ϕ_i estén unívocamente determinadas por sus valores (y los de sus derivadas, si es preciso) en los nodos. Así se define el **grado de libertad** del elemento finito como el número de datos que hay que suministrar para definir de forma única a las funciones base sobre un elemento.

Por ejemplo, si no hacemos uso de las derivadas, se definirían las funciones base $\phi_i \in X_h$ por $\phi_i(N_j) = \delta_{ij}$, esto es

$$\phi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Recuérdense las funciones que aparecieron en el ejemplo de la sección 1.1.

Nótese que para este tipo de funciones, la matriz de rigidez tiene muchos ceros pues las funciones ϕ_i se anulan sobre todos los elementos que no tengan contacto con el nodo N_i (de ahí el soporte “pequeño”, véase la Figura 4). Más aun, reordenando adecuadamente los nodos podremos obtener que la matriz de rigidez sea una matriz banda.³

4.1.1. Ejemplos de elementos finitos

En función de si tenemos en cuenta o no los valores de las derivadas en los nodos podemos dividir los elementos finitos en dos tipos:

Elementos finitos de Lagrange

Este tipo de elementos escoge como grados de libertad los valores de la función en los nodos, de modo que la dimensión del espacio X_h coincide con el número de nodos.

Los elementos del mallado pueden ser triángulos o rectángulos en el plano, y tetraedros o paralelepípedos en el espacio, siendo los primeros más versátiles pues permiten su adaptación

³Existen algoritmos que reordenan los nodos para que la anchura de la banda sea mínima.

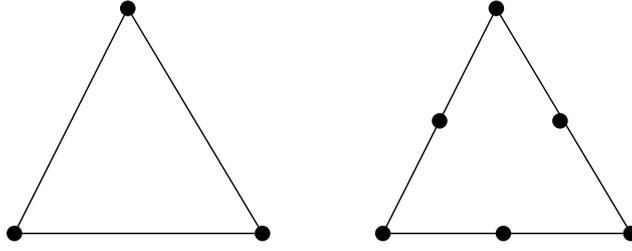


Figura 5. Elementos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 .

a regiones más generales, mientras que los segundos necesitan algún tipo de paralelismo en el dominio Ω .

Para los triángulos, denominados comúnmente elementos \mathcal{P}_l Lagrange, el grado de los polinomios que escogamos estará en función del número de nodos tomados sobre éstos. La Figura 5 muestra los nodos asociados a los elementos \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 que corresponden a una elección de polinomios en el plano de grados uno y dos, con tres y seis grados de libertad respectivamente.⁴ En general, el elemento \mathcal{P}_l en el plano está generado por la familia $\{x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}\}_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq l}$

Algo similar ocurre en \mathbb{R}^3 ; si tomamos como nodos los vértices de un tetraedro debemos usar polinomios del espacio de grado uno (4 grados de libertad), mientras que si añadimos a los nodos los puntos medios de cada arista, debemos escoger polinomios de grado dos (8 grados de libertad).

Por su parte, si escogemos como elementos de la triangulación rectángulos (los denominados elementos \mathcal{Q}_l), nuevamente el número de nodos que consideremos determinará el tipo de funciones base (la Figura 6 muestra algunas posibilidades). Por ejemplo, para el elemento \mathcal{Q}_1 (4 grados de libertad) debemos considerar funciones bilineales de la forma $a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$; para \mathcal{Q}_2 , los polinomios a escoger serían

$$a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2$$

(9 grados de libertad). En general, para un \mathcal{Q}_l en el plano, los polinomios pertenecen a la familia generada por $\{x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}\}_{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq l}$.

Elementos finitos de Hermite

En este tipo de elementos el número de grados de libertad tiene en cuenta además del valor de las funciones sobre los nodos, el valor de algunas de sus derivadas, con lo cual el número de grados de libertad es superior al número de nodos considerados. El más representativo es el

⁴Esto es, polinomios de la forma $a_1 + a_2x + a_3y$ en el primer caso, y $a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$ en el segundo.

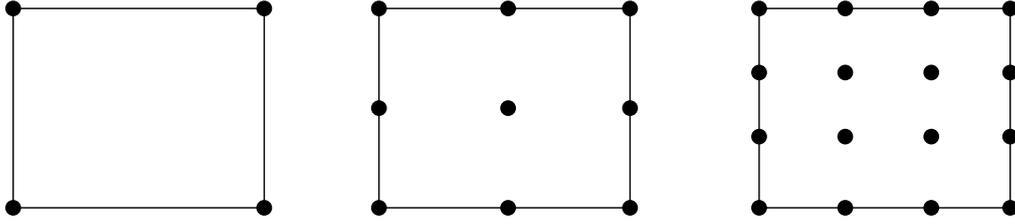


Figura 6. Elementos \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 y \mathcal{Q}_3 .

triángulo de Argyris modificado, que considera como elementos del mallado triángulos, como nodos los vértices a_1, a_2, a_3 , y los puntos medios a_{12}, a_{13}, a_{23} , y como valores para definir las funciones base

$$p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11} p(a_i), \partial_{12} p(a_i), \partial_{22} p(a_i), \partial_n p(a_{ij})$$

lo que da lugar a polinomios bidimensionales de grado 5 (21 grados de libertad), resultando que las funciones de X_h son $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$

Cálculo de la matriz de rigidez

Una vez elegido el mallado y el tipo de elemento que se va a utilizar, el paso siguiente corresponde al cálculo de la matriz de rigidez y del segundo miembro del sistema (4), cuya solución va a proporcionar los valores en los nodos de la solución aproximada.

Ejemplo

Veamos un ejemplo de cálculo de la matriz de rigidez y del segundo miembro para un problema variacional con a y L dados por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Consideramos un mallado compuesto por triángulos y como elemento finito elementos \mathcal{P}_1 Lagrange, es decir, polinomios de la forma $a_1 + a_2 x + a_3 y$ en cada triángulo. Esto es, el espacio de dimensión finita sobre el que construimos nuestra aproximación será:

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_1, v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Para construir los elementos de la matriz de rigidez procedemos del siguiente modo: dado el mallado, podemos identificar para cada triángulo T_i cuáles son sus nodos y viceversa; para cada nodo N_i podemos averiguar a qué triángulos pertenece. Denotemos por J_i , el conjunto de índices j para los cuales $N_i \in T_j$. Entonces

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \sum_k \int_{T_k} \nabla \phi_i|_{T_k} \cdot \nabla \phi_j|_{T_k} = \sum_{k \in J_i \cap J_j} \int_{T_k} \nabla \phi_i|_{T_k} \cdot \nabla \phi_j|_{T_k}$$

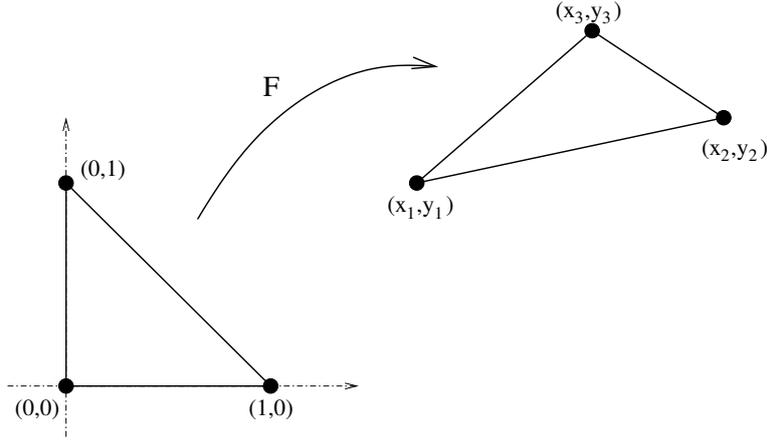


Figura 7. Transformación del elemento de referencia en T .

puesto que en el resto de elementos, o bien ϕ_i o bien ϕ_j son idénticamente nulos. Del mismo modo,

$$L(\phi_i) = \int_{\Omega} f \phi_i = \sum_k \int_{T_k} f \phi_i|_{T_k} = \sum_{k \in J_i} \int_{T_k} f \phi_i|_{T_k}$$

En consecuencia, el cálculo de los elementos de la matriz de rigidez y del segundo miembro sólo ha de hacerse en un conjunto pequeño. En cualquier caso, aun es necesario calcular los valores $\phi_i|_{T_k}$. Este cálculo se hace a través de lo que se conoce como **elemento de referencia**.

Veamos cómo funciona con este tipo de elemento finito. Si queremos calcular $\phi_i|_T$, donde i denota el índice de los nodos asociados al triángulo T , procedemos como sigue: consideramos \hat{T} el triángulo de referencia con vértices en $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ y $\hat{a}_3 = (0, 1)$. Sobre este triángulo de referencia construimos las funciones base asociadas a él, $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ y $\hat{\phi}_3$ tales que $\hat{\phi}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}$. En este caso es muy fácil comprobar que

$$\hat{\phi}_1(x, y) = 1 - x - y, \quad \hat{\phi}_2(x, y) = x, \quad \hat{\phi}_3(x, y) = y.$$

Ahora consideramos el triángulo T cuyos vértices denotamos por

$$a_1 = (x_1, y_1), \quad a_2 = (x_2, y_2), \quad a_3 = (x_3, y_3)$$

y construimos una aplicación afín $F : \hat{T} \rightarrow T$ tal que $F(\hat{a}_i) = a_i$ (véase la Figura 7). Si el triángulo T es no degenerado, es fácil ver que esta aplicación existe, es única y además es biyectiva. Más aun, se tiene:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

En esta situación definimos $\phi_i|_T(x, y) = \hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y))$, $i = 1, 2, 3$. Del mismo modo,

$$\nabla \phi_i|_T(x, y) = \nabla \hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y)) \cdot \nabla F^{-1}(x, y), \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

Nótese que $\nabla\hat{\phi}_1 = (-1, -1)$, $\nabla\phi_2 = (1, 0)$ y $\nabla\hat{\phi}_3 = (0, 1)$ y que $F^{-1}(x, y) = M^{-1}(x, y)^T - M^{-1}n$, donde M y n son la matriz y el vector que conforman la aplicación F .

Nótese finalmente que el cálculo de los elementos de la matriz de rigidez corresponderá a realizar el cálculo de una integral de productos de factores de la forma $\nabla\hat{\phi}_i(F^{-1}(x, y)) \cdot \nabla F^{-1}(x, y)$, para los índices correspondientes, y que estos factores vienen completamente dados por las coordenadas de los vértices del mallado que se ha definido previamente.

SECCIÓN 5

Estimaciones del error

Dado un problema variacional abstracto (PV) , y su correspondiente aproximación (PV_h) , si denotamos por u y u_h sus soluciones respectivas, no es difícil probar la acotación siguiente, conocida como *error del método de Galerkin*:

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

donde la constante C sólo depende de las constantes de coercividad y continuidad de a .

A continuación definimos el interpolante Π_h , de tal forma que a cada función $v \in V$ le asigna una función $\Pi_h v \in V_h$, de manera que tienen el mismo valor sobre los grados de libertad del espacio V_h . Por ejemplo, en el caso de los elementos finitos de Lagrange, $\Pi_h v(N_i) = v(N_i)$ para cada nodo N_i . Está claro que

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \leq \|u - \Pi_h u\|_V$$

($\|u - \Pi_h u\|_V$ se conoce como el *error de interpolación*).

El estudio del error cometido en la aproximación por elementos finitos comprende dos pasos. En primer lugar se estudia el error cometido en cada elemento, en la seminorma de $H^m(T)$; así

$$|v - \Pi_h v|_{m,T} \leq C \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,T}, \quad 0 \leq m \leq k+1,$$

siempre que k y m sean tales que $\mathbb{P}_k \subset V_h \subset \mathcal{C}^{m-1}$, y donde h_T es el diámetro de T y ρ_T la *redondez* de T , definida como el supremo de los diámetros de las bolas que quedan completamente contenidas en T .⁵

Finalmente damos un resultado de acotación del error en todo Ω . Supongamos que τ_h es una **triangulación regular** de Ω , esto significa que

$$(i) \quad \exists \sigma > 0 \text{ tal que } \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \quad \forall T \in \tau_h,$$

⁵Nótese cómo aquí juega un papel importante el ángulo de los elementos del mallado. Si este ángulo se hace arbitrariamente pequeño, la constante de acotación se hace muy grande.

$$(II) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{T \in \tau_h} h_T \right) = 0.$$

Esencialmente significa que la forma de los triángulos no degenera (la redondez no se hace demasiado pequeña) y que a medida que refinamos el mallado, todos los elementos se hacen más pequeños. En esta situación se prueba que

$$\|v - \Pi_h v\|_m \leq Ch^{k+1-m} |v|_{k+1}, \quad 0 \leq m \leq k+1$$

Es interesante observar que el error de aproximación del MEF depende del error cometido en el método de Galerkin, el cual puede ser estudiado de forma independiente a la aproximación usada, y de la interpolación a la que da lugar el espacio de elementos finitos escogido, que es independiente del problema en cuestión. No obstante es necesario tener en cuenta la regularidad de las funciones involucradas. Las acotaciones de error también nos dicen que si no esperamos regularidad en la solución, no tiene sentido tratar de usar elementos finitos con un mayor número de grados de libertad, pues no alcanzaremos una mejor cota del error.

SECCIÓN 6

Ejemplo numérico

Sea $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. La formulación variacional del mismo se vió en la sección (2.2). Para aplicar el MEF a dicha formulación, consideramos un mallado como el de la Figura 8, en el que hemos numerado los nodos, comenzando por los interiores y en el que los números rodeados con círculos corresponden a la numeración de los elementos.

Usaremos como funciones base el elemento finito \mathcal{P}_1 Lagrange visto anteriormente. Nótese que puesto que las funciones base deben estar en $H_0^1(\Omega)$, sus valores en la frontera deben ser nulos, de modo que los valores sobre los nodos que están sobre la frontera son fijos (e iguales a cero). Así pues, los únicos nodos del sistema son $\{1, 2, 3\}$. De hecho la numeración ha sido escogida para simplificar la notación.

Usando las notaciones anteriores definimos los conjuntos de índices asociados a los nodos

$$J_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad J_2 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}, \quad J_3 = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

que corresponden a los elementos adyacentes a cada uno de los nodos. Nótese también que $J_1 \cap J_2 = \{6, 7\}$, $J_2 \cap J_3 = \{10, 11\}$ y $J_1 \cap J_3 = \emptyset$.

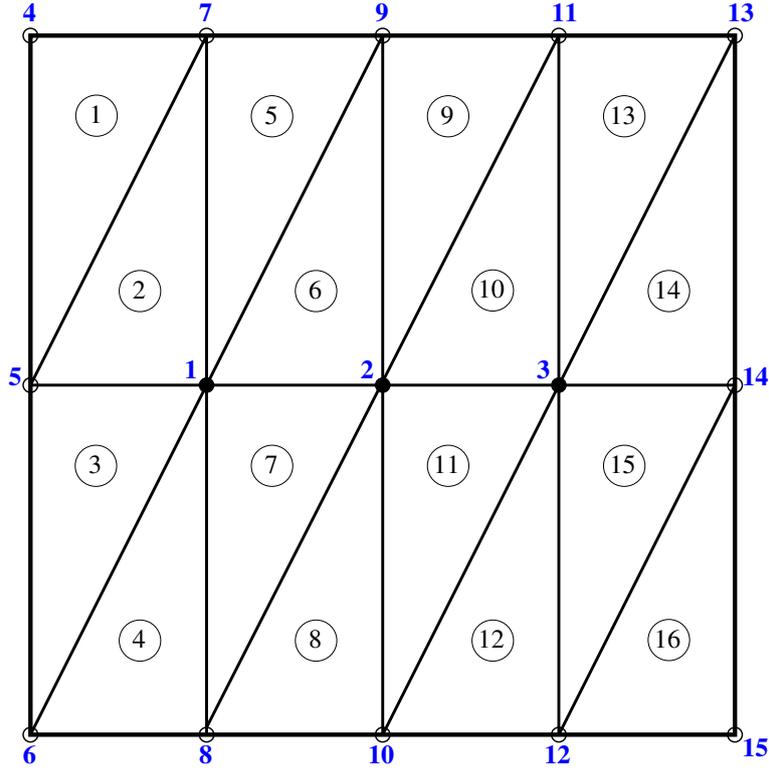


Figura 8. Mallado para el dominio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

Para calcular la matriz de rigidez haremos uso nuevamente del elemento de referencia. En este ejemplo concreto hemos de observar que la matriz de la aplicación F definida en (5) tiene sólo dos posibilidades, en función del aspecto de los triángulos (distinguiendo entre los de numeración par o impar), pues la diferencia entre las coordenadas de los vértices es siempre la misma.

Teniendo en cuenta el cálculo de $\nabla\phi_i|_T(x, y)$ hecho en (6), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Triángulo par} &\longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; & \begin{cases} \nabla\phi_{a_1}|_T = (-4, 0) \\ \nabla\phi_{a_2}|_T = (4, -2) \\ \nabla\phi_{a_3}|_T = (0, 2) \end{cases} \\ \text{Triángulo impar} &\longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; & \begin{cases} \nabla\phi_{a_1}|_T = (0, -2) \\ \nabla\phi_{a_2}|_T = (4, 0) \\ \nabla\phi_{a_3}|_T = (-4, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

Por ejemplo, en el triángulo 11, se tiene

$$\nabla\phi_1|_{T_{11}} = (0, 0), \quad \nabla\phi_2|_{T_{11}} = (-4, 2), \quad \nabla\phi_3|_{T_{11}} = (4, 0).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
a(\phi_1, \phi_1) &= \sum_{k \in J_1} \int_{T_k} \nabla \phi_1|_{T_k} \cdot \nabla \phi_1|_{T_k} = \int_{T_2} (4, -2) \cdot (4, -2) + \int_{T_3} (4, 0) \cdot (4, 0) \\
&+ \int_{T_4} (0, 2) \cdot (0, 2) + \int_{T_5} (0, -2) \cdot (0, -2) + \int_{T_6} (-4, 0) \cdot (-4, 0) \\
&+ \int_{T_7} (-4, 2) \cdot (-4, 2) = 5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(\phi_2, \phi_2) &= \sum_{k \in J_2} \int_{T_k} \nabla \phi_2|_{T_k} \cdot \nabla \phi_2|_{T_k} = \int_{T_6} (4, -2) \cdot (4, -2) + \int_{T_7} (4, 0) \cdot (4, 0) \\
&+ \int_{T_8} (4, -2) \cdot (4, -2) + \int_{T_9} (0, -2) \cdot (0, -2) + \int_{T_{10}} (-4, 0) \cdot (-4, 0) \\
&+ \int_{T_{11}} (-4, 2) \cdot (-4, 2) = 6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(\phi_3, \phi_3) &= \sum_{k \in J_1} \int_{T_k} \nabla \phi_3|_{T_k} \cdot \nabla \phi_3|_{T_k} = \int_{T_{10}} (4, -2) \cdot (4, -2) + \int_{T_{11}} (4, 0) \cdot (4, 0) \\
&+ \int_{T_{12}} (0, 2) \cdot (0, 2) + \int_{T_{13}} (0, -2) \cdot (0, -2) + \int_{T_{14}} (-4, 0) \cdot (-4, 0) \\
&+ \int_{T_{15}} (-4, 2) \cdot (-4, 2) = 5,
\end{aligned}$$

$$a(\phi_1, \phi_2) = \sum_{k \in J_1 \cap J_2} \int_{T_k} \nabla \phi_1|_{T_k} \cdot \nabla \phi_2|_{T_k} = \int_{T_6} (-4, 0) \cdot (4, -2) + \int_{T_7} (-4, 2) \cdot (4, 0) = -2,$$

$$a(\phi_2, \phi_3) = \sum_{k \in J_2 \cap J_3} \int_{T_k} \nabla \phi_2|_{T_k} \cdot \nabla \phi_3|_{T_k} = \int_{T_{10}} (-4, 0) \cdot (4, -2) + \int_{T_{11}} (-4, 2) \cdot (4, 0) = -2,$$

y por último $a(\phi_1, \phi_3) = 0$ pues $J_1 \cap J_3 = \emptyset$. La matriz de rigidez es

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora el segundo miembro,

$$L(\phi_i) = \sum_{k \in J_i} \int_{T_k} \phi_i|_{T_k} f.$$

En lugar de efectuar un cálculo directo de estas integrales, usaremos la siguiente fórmula de cuadratura para aproximar una integral:

$$\int_T h \approx \frac{|T|}{3} (h(a_1) + h(a_2) + h(a_3))$$

donde a_1 , a_2 y a_3 son los vértices de un triángulo T . Con esta fórmula,

$$L(\phi_1) = \sum_{k \in J_1} \int_{T_k} \phi_1|_{T_k} f = 6 \frac{|T|}{3} f(N_1) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8},$$

$$L(\phi_2) = \sum_{k \in J_2} \int_{T_k} \phi_2|_{T_k} f = 6 \frac{|T|}{3} f(N_2) = \frac{\pi^2}{4},$$

$$L(\phi_3) = \sum_{k \in J_3} \int_{T_k} \phi_3|_{T_k} f = 6 \frac{|T|}{3} f(N_3) = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8}.$$

Finalmente, el sistema a resolver será

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{4} \\ \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 \approx 0,7001, \\ \alpha_2 \approx 0,8780, \\ \alpha_3 \approx 0,7001, \end{matrix}$$

mientras que la solución real $u(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$ evaluada en los nodos es:

$$u(N_1) \approx 0,7071, \quad u(N_2) = 1, \quad u(N_3) = 0,7071.$$

REFERENCIAS

- [1] AXELSSON, O., & BARKER, V. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. SIAM, 2001.
- [2] CIARLET, P. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
- [3] LOGAN, D. *A first course in the Finite Element Method*. Brooks/Cole, 2002.
- [4] ZIENKIEWICZ, O. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1977.