

Modelos Matemáticos y Simulación Numérica en Arquitectura

**Departamento de Arquitectura
Departamento de Matemáticas**

**Universidad de los Andes
2006**

Tabla de Contenidos

1	Geometría en la Arquitectura	4
1.1	La sección áurea	4
1.1.1	El rectángulo áureo	5
1.1.2	Pitágoras y el número de oro	6
1.1.3	El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza	7
1.1.4	La espiral logarítmica	10
1.2	La Catenaria	13
1.2.1	Formulación discreta	14
1.2.2	La Catenaria simétrica	15
1.2.3	La Cicloide	18
1.2.4	Trayectoria de un punto del borde de un disco que rueda sin deslizar	18
1.2.5	La Braquistocrona	19
1.3	Superficies Mínimas	21
1.3.1	Superficies Mínimas en Arquitectura	21
2	Álgebra Matricial	25
2.1	Método de Gauss-Jordan	25
3	Análisis Estructural	28
3.1	Cargas	28
3.2	Tensión	29
3.3	Deformación Producida por Tracción	30
3.4	Ensayo de Tracción	30
3.5	Gráficos σ - ϵ para aceros	31
3.6	Análisis de Cerchas – Método de las Uniones	34
4	Método de Diferencias Finitas	40
4.1	Método de la Expansión de Taylor	41
4.2	Expresiones de diferencias, cuyo uso es frecuente	41
4.3	Simulación de la Propagación de Onda	42
4.3.1	Introducción a las oscilaciones	42
4.3.2	Ecuación de Onda	43
4.3.3	Método de diferencias finitas para la ecuación de onda en una dimensión	45
4.3.4	Principio de Huygens	47
5	Método de los Elementos Finitos	47
5.1	Introducción	47
5.1.1	Breve introducción histórica:	48
5.1.2	Terminología	48
5.1.3	Como se crea un modelo de elementos finitos?	48
5.1.4	Etapas para el cálculo con ordenador	49
5.1.5	Creación de geometría y entrada de datos	49
5.1.6	Matriz de rigidez: Obtención de la matriz de rigidez en cada elemento	51
5.1.7	Ensamblaje de la matriz: Obtención de la matriz de rigidez global	51
5.1.8	Obtención de los desplazamientos	51
5.1.9	Obtención de tensiones:	51
5.2	Formulación	51
6	Modelos de fenómenos físicos: Método de Elementos Finitos	54
6.1	Análisis Estructural (Análisis de una torre de transmisión eléctrica)	55

6.2	Análisis Térmico (Análisis de una pared de aislamiento térmico).....	64
6.3	Análisis de Flujo (Flujo de aire a través de sistema montañoso)	73
7	Introducción a la estadística descriptiva y la probabilidad.....	84
7.1	Estadística descriptiva	84
7.1.1	Población y muestra	84
7.1.2	Representaciones gráficas.....	85
7.2	Probabilidad.....	94
7.2.1	Eventos	94
7.2.2	Probabilidad de eventos.....	95
7.2.3	Axiomas de probabilidad.....	96
7.2.4	Posibilidades y probabilidades	97
7.3	Simulación de Monte Carlo.....	98
7.3.1	Conceptos fundamentales.....	99

1 Geometría en la Arquitectura

1.1 La sección áurea

La sección áurea es la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

Tomemos un segmento de longitud uno y hagamos en él la división indicada anteriormente, como lo muestra la Figura 1.

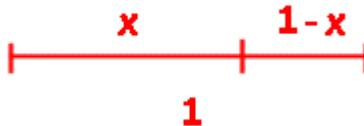


Figura 1 Segmento dividido en proporción áurea

Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación que tendremos que resolver:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow 1-x = x^2 + x - 1 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(-1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{-3 - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{9 - 5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618... \end{aligned}$$

A esta relación se le conoce como el número de oro, y es designado con la letra griega $\Phi = 1,61803\dots$ (Fi), llamado número de oro y que es la inicial del nombre del escultor griego Fidias quien lo tuvo presente en sus obras.

1.1.1 El rectángulo áureo

Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo, Figura 2:

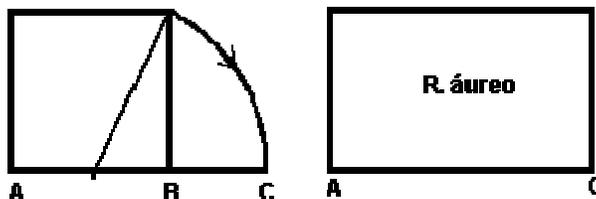


Figura 2 Construcción del rectángulo áureo

Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, es claro que el lado mayor del rectángulo vale $1 + \sqrt{5}$ por lo que la proporción entre los dos lados es $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (nuestro número de oro).

Figura 3.

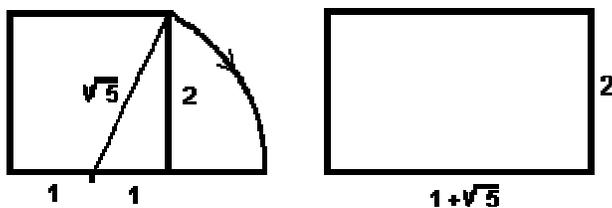


Figura 3 Proporción del rectángulo áureo

Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que, como veremos mas adelante, se han utilizado en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, carnets, cajetillas de tabaco, etc...).

Una propiedad importante de los triángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como indica la figura, la diagonal AB pasa por el vértice C. Figura 4

En efecto, situemos los rectángulos en unos ejes de coordenadas con origen en el punto A. Las coordenadas de los tres puntos serán entonces:

$$A(0,0) , b(3 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}) , c(1 + \sqrt{5}, 2)$$

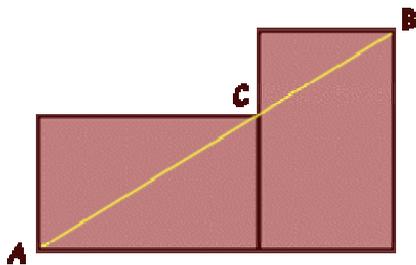


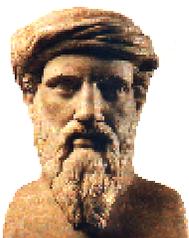
Figura 4 Rectángulos áureos adyacentes

Vamos a demostrar que los vectores $\overline{AB} = (3 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ y $\overline{AC} = (1 + \sqrt{5}, 2)$ son proporcionales:

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{3 - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{5}^2}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, los tres puntos están alineados.

1.1.2 Pitágoras y el número de oro



Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego, nació en la isla de Samos. Fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que Pitágoras había sido condenado a exiliarse de Samos por su aversión a la tiranía de Polícrates. Hacia el 530 a.C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo. La filosofía

de Pitágoras se conoce sólo a través de la obra de sus discípulos.

Entre las amplias investigaciones matemáticas realizadas por los pitagóricos se encuentran sus estudios de los números pares e impares y de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde este punto de vista aritmético, cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. A través de estos estudios, establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

La estrella pentagonal (Figura 5) o pentágono estrellado era, según la tradición, el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Los pitagóricos pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico, donde sólo tenían cabida los números fraccionarios. La casualidad hizo que en su propio símbolo se encontrara un número raro: el número de oro.

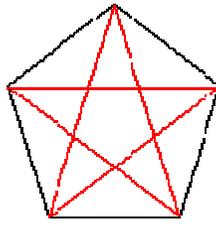


Figura 5 Estrella pentagonal

Por ejemplo, la relación entre la diagonal del pentágono y su lado, Figura 6, es el número de oro:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots$$

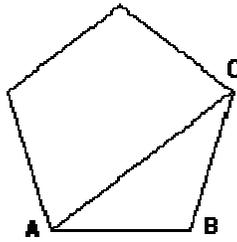


Figura 6 Proporción áurea en la estrella pentagonal

1.1.3 El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza

El número áureo aparece, en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo,... Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego. En la Figura 7 se puede comprobar que $\frac{AB}{CD} = \Phi$. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: $\frac{AC}{AD} = \Phi$ y $\frac{CD}{CA} = \Phi$.

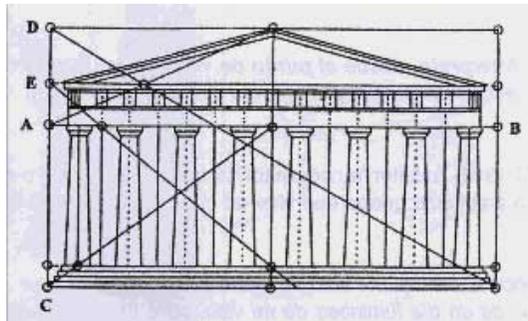


Figura 7 Esquema del Partenón griego

Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En La Gran Pirámide de Keops, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es 2Φ . Figura 8.



Figura 8 Pirámides Egipcias

Ya vimos que el cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo. En un pentágono regular está basada la construcción de la Tumba Rupestre de Mira en Asia Menor. Figura 9

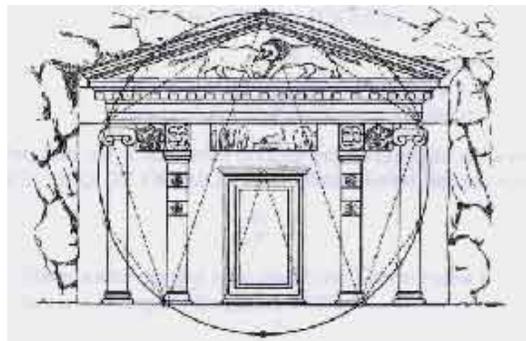


Figura 9 Tumba Rupestre de Mira

Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, en nuestros carné y también en las cajetillas de tabaco.



Figura 10 Proporción áurea en el diseño

Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo Leonardo da Vinci. Sirvió para ilustrar el libro La Divina Proporción de Luca Pacioli editado en 1509. En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90° con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo. Figura 11.

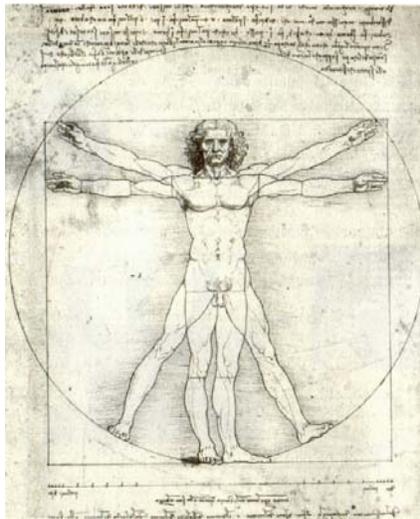


Figura 11 El hombre de Viturbio. Leonardo Davinci

El cuadro de Dalí, Leda atómica, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico. Figura 12.



Figura 12 Leda Atómica. Salvador Dalí

1.1.4 La espiral logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo ABCD (Figura 13) y le sustraemos el cuadrado AEFD cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una espiral logarítmica.

Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante) o espiral geométrica (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética). J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del nautilus.

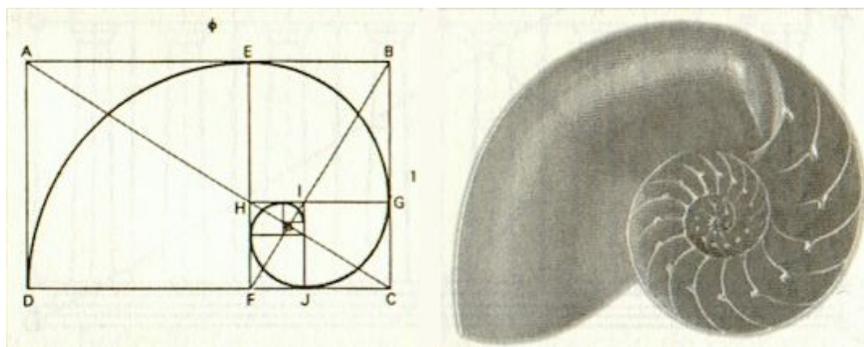


Figura 13 Espiral logarítmica y Concha de Nautilus

Problema 1

Dado un segmento áureo AB ¿cómo encontrar geoméricamente el segmento total?

Solución:

Con diámetro igual al segmento áureo AB se traza una circunferencia tangente al segmento áureo en un extremo del mismo. La semirrecta trazada desde el otro extremo del segmento áureo y que pasa por el centro de la circunferencia, determina con ésta, el segmento total. Figura 14

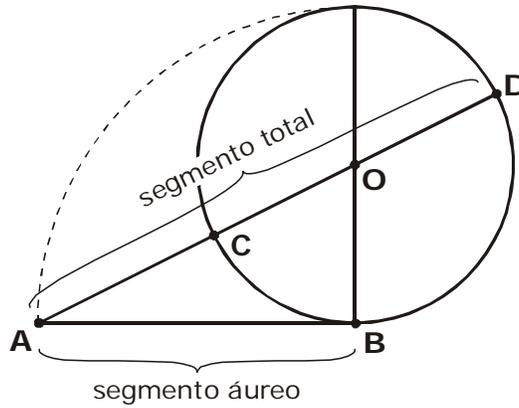


Figura 14 Demostración Problema 2

Demostración:

Recordando que se llama “potencia de un punto con respecto a una circunferencia” al producto de los segmentos que se obtienen al trazar por ese punto una secante a la circunferencia.

Por ejemplo: La potencia de A respecto a la circunferencia del ejemplo anterior, será:

$$Pot.A = \overline{AM} \cdot \overline{AN}$$

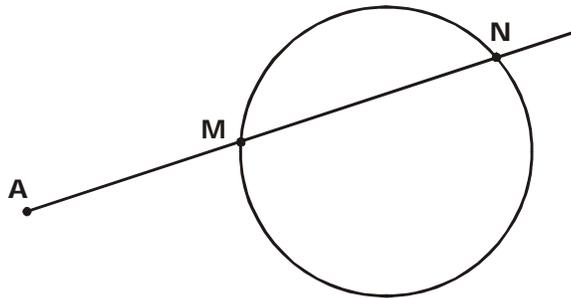


Figura 15 Potencia de un punto con respecto a una circunferencia

La potencia de A respecto a la circunferencia del ejemplo anterior, será:

$$Pot.A = \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$$

La parte mayor entre \overline{AC} y \overline{CD} es \overline{CD} que es igual a la medida del segmento áureo:

$$\overline{CD} = \overline{AB}$$

Entonces: $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{CD}^2$

de donde obtenemos $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$

Luego \overline{AD} es el segmento total.

Problema 2

Demuestre que los segmentos QN, NP y QP del pentágono regular mostrado en la Figura 16 están en proporción áurea.

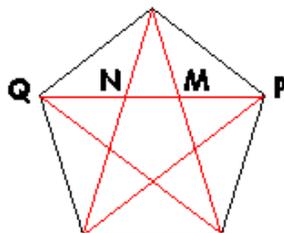


Figura 16 Pentágono regular

Solución:

Consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales. Figura 17. En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36° , 72° y 108° . La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36. Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales seleccionamos tres: los triángulos ABE, ABF y AFG. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, que llamaremos: $BE=a$, $AB=AE=b$, $AF=BF=AG=c$ y $GF=d$. Las longitudes de estos segmentos cumplen: $a>b>c>d$.

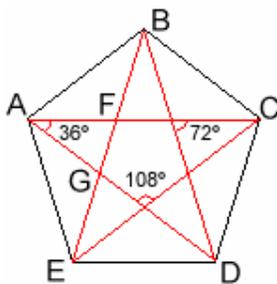
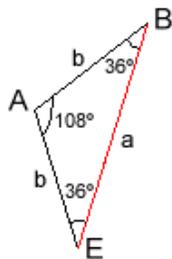


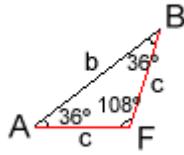
Figura 17 Demostración

Consideremos cada uno de estos triángulos por separado y apliquemos el teorema del seno:
Triángulo ABE



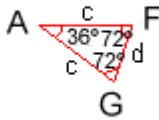
$$\frac{a}{\sin(108^\circ)} = \frac{b}{\sin(36^\circ)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin(108^\circ)}{\sin(36^\circ)}$$

Triángulo ABF



$$\frac{b}{\sin(108^\circ)} = \frac{c}{\sin(36^\circ)} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin(108^\circ)}{\sin(36^\circ)}$$

Triángulo AFG



$$\frac{a}{\sin(72^\circ)} = \frac{d}{\sin(36^\circ)} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{\sin(72^\circ)}{\sin(36^\circ)} = \frac{\sin(108^\circ)}{\sin(36^\circ)}$$

En consecuencia podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{\sin(108^\circ)}{\sin(36^\circ)} = 1.618033988\dots$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro.

Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que $c=a-b$ y haciendo $b=1$:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-b} \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (el número d oro)}$$

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

Como consecuencia, se verifica $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sin(108^\circ)}{\sin(36^\circ)}$.

1.2 La Catenaria

La curva que describe un cable que está fijo por sus dos extremos y no está sometido a otras fuerzas distintas que su propio peso es una catenaria. La catenaria se confundió al principio con la parábola, hasta que el problema lo resolvieron los hermanos Bernoulli simultáneamente con Leibniz y Huygens.

1.2.1 Formulación discreta

Sea una cadena de bolitas metálicas como las que se utilizan para sujetar los tapones de los fregaderos. Supondremos que hay N bolitas igualmente repartidas sobre un hilo de longitud L y de masa despreciable, Figura 18.

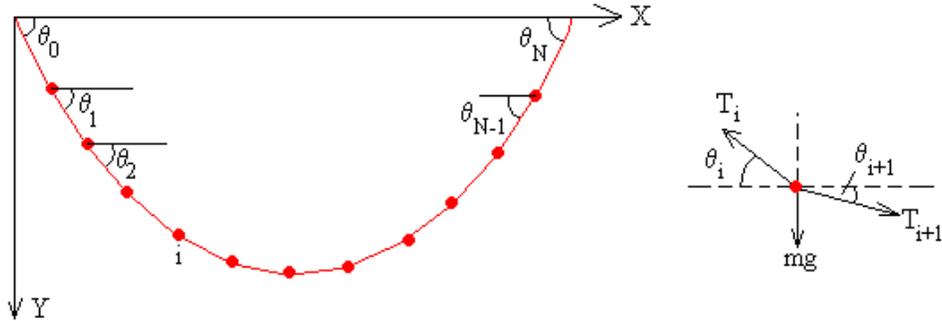


Figura 18 Diagrama de cuerpo libre de un cable

Cada bolita estará, por tanto, sometida a tres fuerzas: su propio peso, la fuerza que ejerce el hilo a su izquierda y a su derecha.

La condición de equilibrio para la bolita i de masa m se expresa

$$T_i \cos \alpha_i = T_{i+1} \cos \alpha_{i+1}$$

$$T_i \sin \alpha_i - T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = mg$$

Todas las componentes horizontales de la tensión del hilo son iguales, y la denominaremos T_x .

$$T_x = T \cos \theta_0 = T \cos \theta_1 = T \cos \theta_{i+1} = T \cos \theta_{N+1}$$

Dividiendo la segunda ecuación por T_x tenemos la siguiente relación entre el ángulo θ_i y el ángulo θ_{i+1}

$$\tan \theta_{i+1} = \tan \theta_i - \frac{mg}{T_x}$$

A la cantidad constante cociente entre el peso de cada bolita mg y la componente horizontal T_x de la tensión del hilo, le denominaremos parámetro γ . La relación de recurrencia se escribe para cada bolita $i=1 \dots N$.

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \tan \theta_0 - \gamma \\ \tan \theta_2 &= \tan \theta_1 - \gamma \\ \tan \theta_3 &= \tan \theta_2 - \gamma \\ &\dots \\ \tan \theta_i &= \tan \theta_{i-1} - \gamma \\ &\dots \\ \tan \theta_{N-1} &= \tan \theta_{N-2} - \gamma \\ \tan \theta_N &= \tan \theta_{N-1} - \gamma \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro obtenemos el ángulo θ_N en función del ángulo inicial θ_0 .
 $\tan \theta_N = \tan \theta_0 - N\gamma$

Si los extremos del hilo están a la misma altura, por razón de simetría tendremos que
 $\tan \theta_0 = -\tan \theta_N$

Por tanto,
 $\tan \theta_0 = N\gamma/2$

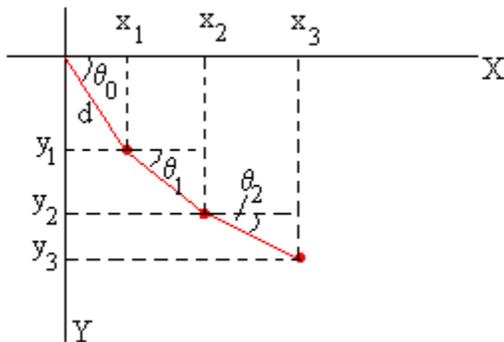
Sumando miembro a miembro la relación de recurrencia hasta el término i , obtenemos el ángulo θ_i en función del ángulo inicial θ_0 .

$$\tan \theta_i = \tan \theta_0 - \gamma i = (N - 2i) \cdot \gamma / 2$$

El ángulo θ_i que forma el hilo con la horizontal en la posición de cada una de las bolitas, el ángulo inicial θ_0 y el final θ_N se calculan mediante la siguiente fórmula

$$\tan \theta_i = \frac{N - 2i}{2} \gamma \quad i = 0, \dots, N$$

Las coordenadas (x_i, y_i) de la bolita i se obtendrán sumando las proyecciones $d \cdot \cos \theta_j$ y $d \cdot \sin \theta_j$, $j=0 \dots i-1$, sobre el eje X y sobre el eje Y respectivamente, siendo d la distancia entre dos bolitas consecutivas $d=L/(N+1)$



$$x_i = \frac{L}{N+1} \sum_{j=0}^{i-1} \cos \theta_j$$

$$y_i = \frac{L}{N+1} \sum_{j=0}^{i-1} \sin \theta_j$$

1.2.2 La Catenaria simétrica

Consideremos un cable de longitud L sujeto por sus dos extremos que están situados a la misma altura y que distan a uno del otro. Sea ρ la densidad del cable (masa por unidad de longitud), Figura 19.

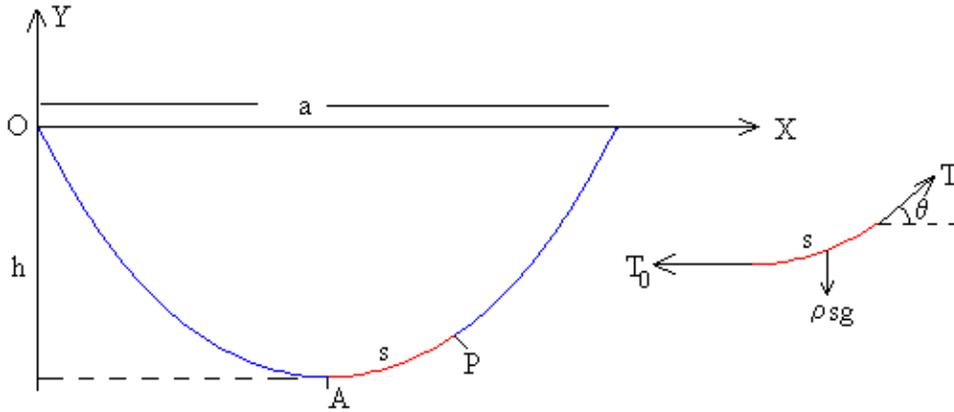


Figura 19 Catenaria simétrica

En la figura, se representa las fuerzas que actúan sobre una porción s de cable que tiene como extremo el punto más bajo A:

- el peso,
- la fuerza que ejerce la parte izquierda del cable sobre el extremo izquierdo A de dicho segmento,
- la fuerza que ejerce la parte derecha del cable sobre el extremo derecho P del segmento s .

La condición de equilibrio se escribe

$$T \cos \theta = T_0$$

$$T \sin \theta = \rho g s$$

O bien,

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho g s}{T_0}$$

Derivando con respecto de x , y teniendo en cuenta que la longitud del arco diferencial $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0} \frac{ds}{dx} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Integrando esta ecuación, teniendo en cuenta que para $x = a/2$, (en el punto más bajo A de la curva) $dy/dx = 0$.

$$\int_a^x \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int_{a/2}^x \frac{\rho g}{T_0} dx \quad v = \frac{dy}{dx}$$

$$\arg \sinh(v) = \frac{\rho g}{2T_0} (2x - a) \quad v = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{\rho g}{2T_0} (2x - a)\right)$$

Integrando de nuevo, con la condición de que para $x=a/2$, $y=-h$.

$$y + h = \frac{T_0}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g}{2T_0}(2x - a)\right) - \frac{T_0}{\rho g}$$

Como la catenaria es simétrica para $x=a$, $y=0$, por lo que la flecha h vale.

$$h = \frac{T_0}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g a}{2T_0}\right) - \frac{T_0}{\rho g}$$

La ecuación de la catenaria es, finalmente

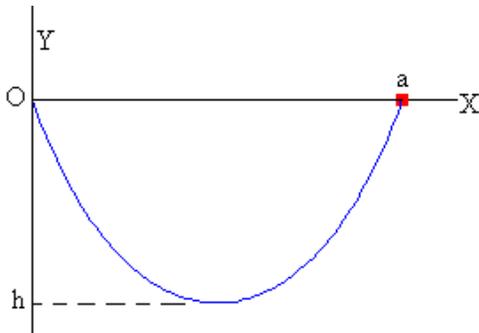
$$y = \frac{T_0}{\rho g} \left[\cosh\left(\frac{\rho g}{2T_0}(2x - a)\right) - \cosh\left(\frac{\rho g a}{2T_0}\right) \right]$$

La longitud de la catenaria es

$$L = \int ds = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \cosh\left(\frac{\rho g}{2T_0}(2x - a)\right) dx$$

$$L = \frac{2T_0}{\rho g} \sinh\left(\frac{\rho g a}{2T_0}\right)$$

Ejemplo de solución



En la figura, se muestra una catenaria simétrica de longitud L , cuya "luz" es a y la "flecha" h . Para dibujar la catenaria

- Se resuelve la ecuación trascendente (3)

$$L = \frac{1}{\gamma} \sinh(\gamma a) \quad \gamma = \frac{\rho g}{2T_0}$$

- Se representa la catenaria

$$y = \frac{1}{2\gamma} [\cosh(\gamma(2x - a)) - \cosh(\gamma a)]$$

- Se calcula el mínimo o la "flecha" h

$$h = \frac{1}{2\gamma} (\cosh(\gamma a) - 1)$$

Problema 3

Usar la hoja de cálculo ubicada en la dirección:

<http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitec/catenaria.xls>

y graficar la curva catenaria con los siguientes parámetros:

Longitud del cable $L=1.0$

Luz del cable $a=0.5$.

Comprobar que $\gamma=4.354$, $h=0.4$

Cambiar la luz del cable $a=0.8$, y obtener los parámetros γ y h

1.2.3 La Cicloide

La cicloide es una de curvas más importantes en la Física y las Matemáticas, junto a la catenaria y otras curvas. La curva cicloide se encuentra al estudiar varios fenómenos físicos:

- Trayectoria de un punto del borde de un disco que rueda sin deslizar
- Forma que adopta un tobogán para que una partícula que desliza sin rozamiento emplee un tiempo mínimo en recorrerlo

1.2.4 Trayectoria de un punto del borde de un disco que rueda sin deslizar

La cicloide se produce cuando se hace rodar sin deslizar un disco sobre una superficie horizontal. Un punto del borde del disco describe una curva que se denomina cicloide (palabra griega que significa circular). A un giro del disco le corresponde un arco de la cicloide, Figura 20.

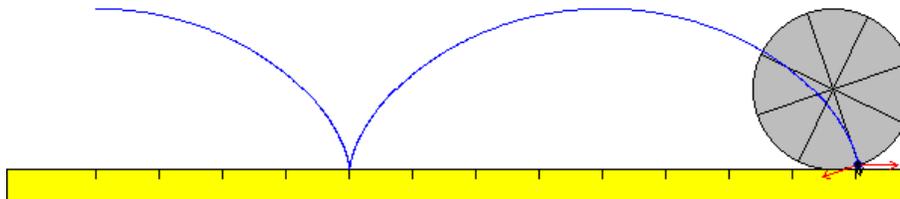


Figura 20 Trazado de una Cicloide

La cicloide se puede parametrizar de acuerdo al ángulo t recorrido por el círculo las coordenadas del punto P serán, tal como se muestra en la Figura 21. Definidas por las ecuaciones:

$$x = bt - b \sin t$$

$$y = b - b \cos t$$

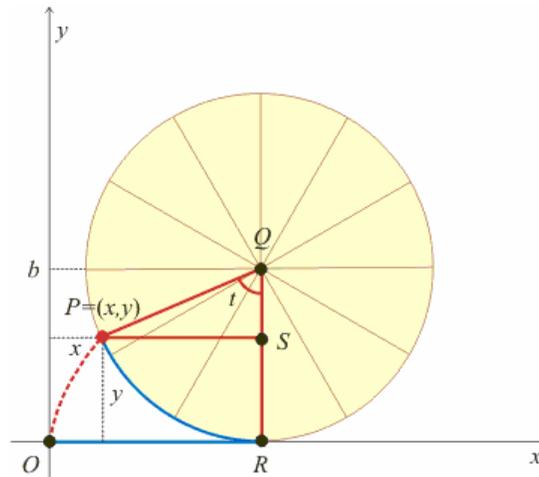


Figura 21 Componentes de la Cicloide

Problema 4

Usar la hoja de cálculo ubicada en la dirección:

<http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitec/cicloide.xls>

y graficar la cicloide para diferentes radios de círculos generadores.

1.2.5 La Braquistocrona

Supongamos que se une por medio de un alambre deformable un punto A a otro B a menor altura ¿qué trayectoria (recta o sinuosa) Figura 22, qué forma debe adoptar el alambre para que el descenso de una partícula sobre este sea lo más rápido posible?

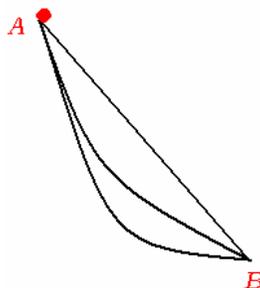


Figura 22 Posibles caminos de la partícula

Galileo creía que una cuentecilla caería en menor tiempo si el alambre se curvaba. Más tarde en 1696, Johann Bernoulli intentó averiguar (y lo consiguió de manera genial) qué

clase de curvatura proporciona el descenso más vertiginoso. Esta curva se conoce como braquistocrona (del griego brachistos, el más breve, y cronos, tiempo).



Figura 23 Modelo físico para comprobar la Braquistocrona. Siglo XVIII

Es posible resolver este hermoso problema desde distintas perspectivas. Históricamente la cuestión entronca con un problema de óptica aparentemente sin relación, la refracción de la luz cuando un rayo cambia de medio en su propagación Figura 24. Al traspasar la luz a un medio más denso, en el cual la onda se ralentiza, el rayo se desvía. El tiempo requerido para recorrer el camino que parte del punto A y arriba en otro B será:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

Si el rayo elige una trayectoria para tardar lo mínimo entonces $dt/dx=0$

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

o bien $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$ (Ley de Snell)

Al igual que el rayo, la bolita que desciende por el alambre elige el camino más rápido sabiendo que la velocidad que alcanza a una altura no depende del camino seguido (las reglas del juego), solo influye su pérdida de energía potencial no la ruta que lo condujo y vale:

$$v = \sqrt{2g(2R-y)} \quad \text{con} \quad \frac{\sin \alpha}{v} = cte$$

Es también realmente sorprendente lo que en el año 1673, Christian Huygens (La Haya, 1629-1695), matemático, físico y astrónomo, descubrió, un hecho que le pareció extraordinario en la Cicloide: si un punto se desplaza a lo largo esta curva invertida cuyas ecuaciones están descritas en forma paramétrica, en caída libre, llegará al punto mínimo de la Cicloide en un tiempo que no depende del origen desde donde comenzó a caer. Esta propiedad se la denomina tautócrona (del griego tauto, el mismo).

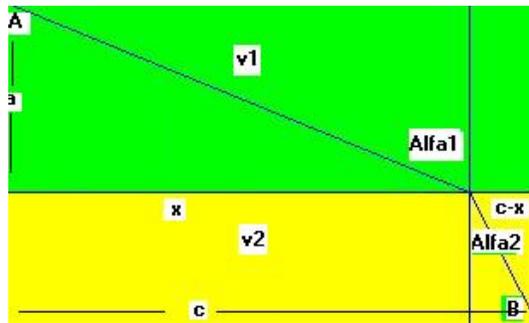


Figura 24 Trayectoria del rayo de luz en dos medios diferentes

Ejercicio:

Comprobar que la Braquistocrona es la trayectoria de menor tiempo de recorrido al simular el desplazamiento de una partícula sobre diferentes tipos de curvas

Para esto es necesario abrir la aplicación ubicada en la dirección:
<http://digilander.libero.it/fantinma/pendoli/grafico.htm>

1.3 Superficies Mínimas

No extraña a nadie el hecho de que las matemáticas tengan una aplicación directa en arquitectura. Todos nos podemos imaginar que, antes de poner manos a la obra, el arquitecto tiene que comprobar que la estructura que quiere construir es realizable teniendo en cuenta la resistencia de los materiales que empleará, las cargas que tienen que soportar y quizás también el costo económico. Sin embargo parece que esta aplicación se reduce sólo a esto, al cálculo de estabilidades, de tensiones,... pero de ninguna forma al diseño del objeto arquitectónico mismo. Pensamos, y es bien cierto, que con respecto a la creación artística, el arquitecto aparta de su mesa de trabajo las matemáticas y deja volar la imaginación en la búsqueda de la forma deseada. Pues bien, esto no es exactamente así.

Lo que quizás resulta desconocido es que las matemáticas también pueden ayudar, y de hecho lo hacen, si no en el mismo momento mágico de creación artística, sí en el inmediatamente posterior. “Toda creación arquitectónica es geometría” es una máxima que se puede encontrar en los tratados de geometría descriptiva. Desde siempre, los arquitectos han aprovechado superficies de las que pueden calificarse de clásicas y las combinaban acertadamente. Y en nuestros días, también lo continúan haciendo. Una nueva teoría, la de las superficies de Bézier y sus generalizaciones, engendrada a principios de la década de los 60 en varias empresas automovilísticas y de construcción aeronáutica, permite ayudar al arquitecto a diseñar superficies de manera arbitraria con sencillez y elegancia.

1.3.1 Superficies Mínimas en Arquitectura

Una de las superficies que más se han aplicado en arquitectura es el paraboloides hiperbólico Figura 25. Gaudí fue uno de los que la emplearon, pero quien más la ha trabajado ha sido Félix Candela. Lo que las curvas cónicas (la elipse, la parábola y la hipérbola) son para la dimensión dos, en dimensión tres lo son las superficies cuádricas. Los nombres de estas

superficies tienen que ver con las curvas que aparecen como secciones con planos. En el paraboloides hiperbólico, una de las superficies cuadráticas, estas secciones son parábolas e hipérbolas.

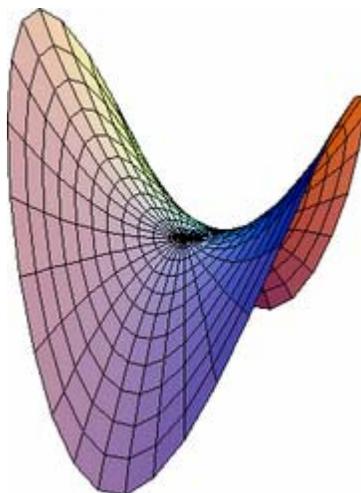


Figura 25 Paraboloides Hiperbólico

Sin embargo la propiedad realmente importante, la que motivó el interés tanto de Gaudí como de Candela, es el hecho de que el paraboloides hiperbólico, aun siendo una superficie curvada, se puede construir con líneas rectas. Lo único que se tiene que hacer es ir variando el ángulo de inclinación de una recta que se mueve encima de otra curva. Este tipo de superficies son denominadas superficies regladas. Es de suponer que esta propiedad es la que permitía a Gaudí dar las instrucciones precisas a sus obreros y al capataz cuando éstos tenían que construir un paraboloides hiperbólico en el techo de la Sagrada Familia (iniciada el año 1883).

Veamos exactamente cómo construir un paraboloides hiperbólico. Dados cuatro puntos en el espacio que no estén en un mismo plano, hay un único paraboloides hiperbólico que pasa precisamente por estos cuatro puntos. Figura 26 . Ésta es la misma propiedad que dice que dos puntos determinan una única recta. Lo que tenían que hacer los obreros era unir con sendas barras uno de los pares de puntos de una parte, y el otro par opuesto por la otra. Después sólo se tiene que dejar resbalar otra barra sobre las dos anteriores manteniendo una velocidad constante en los extremos.

Gaudí utilizó el paraboloides hiperbólico y también otras superficies doblemente regladas como el hiperboloides de revolución. Quien mostró una maestría sublime en su utilización fue el arquitecto de origen español, exiliado a México y después nacionalizado norteamericano, Félix Candela. El mejor ejemplo se puede encontrar en el restaurante Los Manantiales (1958), Figura 27, del parque de Choximilco en la ciudad de México. El techo está formado por ocho paraboloides hiperbólicos. La misma estructura se puede encontrar ahora en el nuevo Oceanográfico (2002) de la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia, Figura 28.

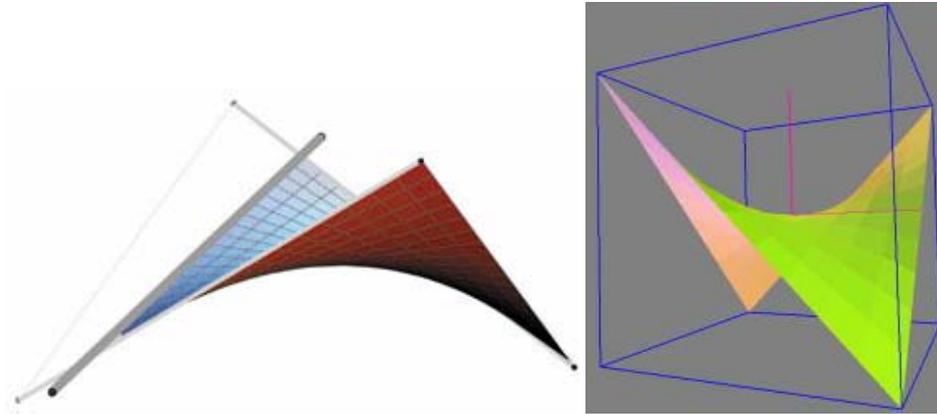


Figura 26 Explicación de la construcción del paraboloid hiperbólico como superficie reglada.

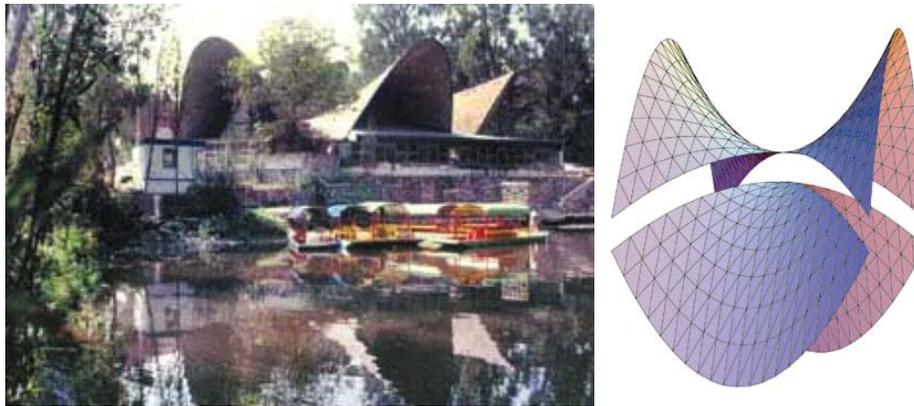


Figura 27 Fotografía del restaurante Los Manantiales en la ciudad de México. A la derecha, descripción explícita de la parte del paraboloid hiperbólico utilizada por el arquitecto Félix Candela.

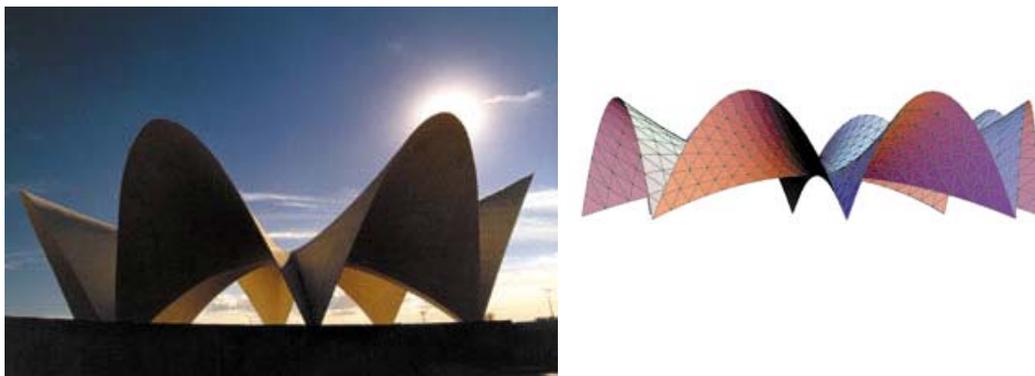


Figura 28 L'Oceanográfico, fotografiado durante su construcción, muestra su estructura. Abajo, representación como unión de partes de un paraboloid hiperbólico de la cubierta del edificio de recepción de l'Oceanográfico.

Tanto Gaudí como Candela aprovecharon superficies matemáticas previamente definidas y estudiadas, con unas ecuaciones perfectamente determinadas y una manera de construir las totalmente establecida. Esto implica una carencia de libertad en el diseño de la forma

deseada. Sólo podían utilizar una determinada familia de superficies dependiendo de unos pocos parámetros. La única variación permitida consiste en jugar con diferentes valores de los parámetros. El genio de los dos arquitectos y la experiencia lograda tras muchas pruebas con maquetas suplió este defecto.

El siguiente ejemplo de utilización de un determinado tipo de superficie en arquitectura lo podemos encontrar en dos de los edificios del complejo olímpico de Múnich (1972), Figura 29. Tanto la cubierta de las gradas del estadio olímpico como la de la piscina son ejemplos de las nominadas superficies mínimas. Estas superficies, conocidas en geometría desde el siglo XVII, tienen la propiedad de ser, entre todas las que tienen la misma frontera, las que tienen área mínima. La propiedad de minimizar el área es la que aprovechó su arquitecto, el alemán Frei Otto, para levantar, mediante un sistema de apoyos y cables, una estructura sorprendentemente ligera donde las tensiones interiores se anulaban, permitiendo a la vez una economía de material y una forma atrevida.

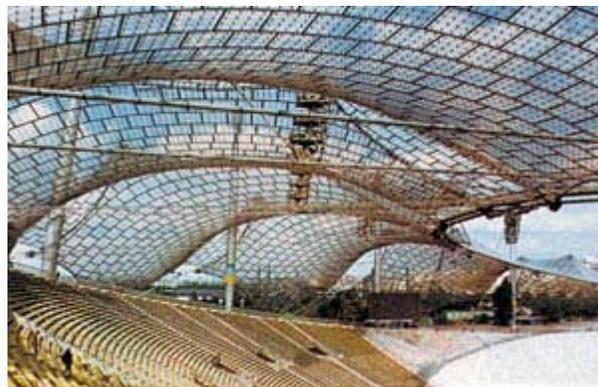


Figura 29 Imagen de la cubierta del estadio olímpico de Munich.

Las superficies mínimas, aunque permiten más grados de libertad que el uso exclusivo de los paraboloides hiperbólicos, continúan teniendo restricciones. Básicamente estas restricciones aparecen por el hecho de que, dada la frontera, la superficie mínima está totalmente determinada. Por lo tanto, los diseñadores de superficies sólo pueden actuar sobre la frontera y esperar que la superficie mínima resultante presente la forma deseada.

Problema 5

Usar el programa Maple para generar las gráficas de las superficies mínimas: Catenoide, Helicoide.

Solución:

Es necesario utilizar las siguientes líneas de comandos para graficar las superficies:

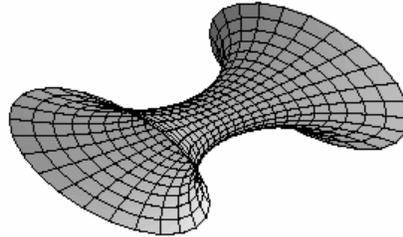
Catenoide

```
> sup:=[u, cosh(u)*cos(v), cosh(u)*sin(v)];  
> Media:=H(sup); Gauss:=K(sup);  
> plot3d(sup, u=-2..2, v=0..2*Pi);
```

$$\text{sup} := [u, \cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v)]$$

$$\text{Media} := 0$$

$$\text{Gauss} := -\frac{1}{\cosh(u)^4}$$



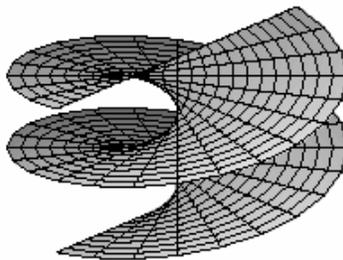
Helicoide

```
> sup:=[u*cos(v),u*sin(v),b*v];
> Media:=H(sup);Gauss:=K(sup);
> sup1:=subs(b=1,sup);
> plot3d(sup1, u=-2..2, v=0..2*Pi);
```

$$\text{sup} := [u \cos(v), u \sin(v), bv]$$

$$\text{Media} := 0$$

$$\text{Gauss} := -\frac{b^2}{(u^2 + b^2)^2}$$



2 Álgebra Matricial

2.1 Método de Gauss-Jordan

Este método se aplica para resolver sistemas lineales de la forma:

$$A \cdot X = B$$

El método de eliminación Gaussiana (simple), consiste en escalonar la matriz aumentada del sistema:

$(A:B)$

para obtener un sistema equivalente :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

donde la notación a'_{ij} se usa simplemente para denotar que el elemento a_{ij} cambió. Se despejan las incógnitas comenzando con la última ecuación y hacia arriba. Por esta razón, muchas veces se dice que el método de eliminación Gaussiana consiste en la eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

Primer paso: pasar a notación matricial, de manera que nos queda:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

El método consiste en hacer ceros los elementos de la matriz que se encuentren situados debajo de la diagonal principal. Para estos es necesario eliminar los elementos de la matriz coloreados:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema Fundamental de Equivalencia

Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye la ecuación i -ésima por una combinación lineal de dicha ecuación y las demás ecuaciones del sistema (siempre que el coeficiente que multiplique a la ecuación i -ésima sea distinto de cero), el sistema resultante es equivalente.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Empezamos por la segunda hilera, vamos a eliminar el 2. Que podemos hacer?

$$(2') = (2) - 2(1)$$

Esta notación significa que la nueva segunda hilera (2') la conseguiremos restando a la original la primera multiplicada por 2. Para hacer esta operación es muy útil trabajar en vectores ya que si lo hacemos elemento a elemento tardaremos más y tendremos más riesgo a equivocarnos. La ley expresada en vectores nos queda:

$$(2') = (2, -4, 2, 1) - 2(1, -3, 5, 2) = (2, -4, 2, 1) + (-2, +6, -10, -4)$$

$$(2') = (0, +2, -8, -3)$$

Así se obtiene el primer cero, esta hilera ya está lista. La siguiente combinación lineal que podemos hacer puede ser:

$$(3') = (3) + (1) = (-1, 1, 3, 1) + (1, -3, 5, 2) = (0, -2, 8, 3)$$

La matriz se transforma en:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es equivalente a la original. Se ve claramente que la ley de transformación que podemos utilizar es:

$$-(3'') = (3') + (2') = (0, -2, 8, 3) + (0, 2, -8, -3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es el inverso al primero, por tanto ahora pasamos de la notación matricial al sistema de ecuaciones que será equivalente al inicial, pero mucho más fácil de resolver:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2y + 8z = 1 \end{cases}$$

y las correspondientes soluciones:

$$x = \frac{14z-5}{2} \quad y = \frac{8z-3}{2} \quad z = z$$

Vemos que para cada valor de z tenemos una solución distinta, hay infinitas, por tanto el sistema es compatible (tenemos solución) e indeterminado (hay infinitas soluciones para el sistema).

3 Análisis Estructural

3.1 Cargas

Consideremos una barra sólida, sometida a la acción de dos fuerzas iguales y opuestas, además colineales (Figura 30). Ambas estarán en equilibrio, por lo que el sólido no puede desplazarse y se verifica la ecuación de equilibrio: $P + (-P) = 0$

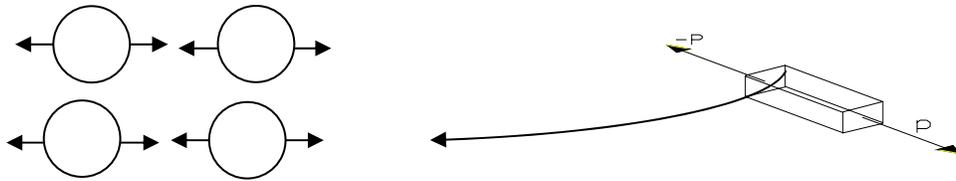


Figura 30 Fuerzas Internas y Externas

Tomemos un sector de la barra y aumentemos su tamaño hasta ver sus moléculas. Veremos pequeñas fuerzas tirando de cada molécula (Figura 31), que tratan de alejarlas de sus vecinas. Sin embargo la atracción entre moléculas opone resistencia con una fuerza igual y contraria, lo que finalmente impide que las moléculas se alejen entre si.

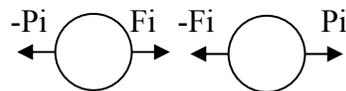


Figura 31 Reacciones internas

Siendo P_i la acción sobre cada molécula generada por las fuerzas “ P ” y “ F_i ” las reacciones que opone el material generada por la atracción molecular (o Atómica)

Si se aumenta “ P ” por algún medio, aumenta la reacción F_i , que podrá crecer hasta un determinado límite, más allá del cual las moléculas se separan irremediamente, y como consecuencia la barra aumentará su longitud en forma permanente.

Hipótesis de Navier

A fin de facilitar el estudio del comportamiento de los metales frente a los distintos esfuerzos, Navier propuso la siguiente hipótesis:

Si un sólido es homogéneo, puede imaginárselo como una sucesión de innumerables secciones transversales paralelas entre si y perpendiculares a su eje longitudinal. Podemos

imaginarnos a la barra como un mazo de naipes, firmemente pegados entre sí. Cada sección transversal sería tan delgada como el diámetro de un átomo. Al mirar la barra de costado veríamos:



Figura 32 Idealización de la barra como la unión de secciones

Si tomamos este modelo propuesto por Navier, podríamos extenderlo un poco más, y pensar en un sólido idealmente homogéneo, donde cada sección transversal sería una especie de placa, con el espesor de un átomo, donde todos sus átomos están perfectamente ordenados y dispuestos según un arreglo matricial cuadrado.

Sobre cada átomo de cada una de las secciones, actuará una fuerza P_i , de manera que podríamos escribir: $P_i = P/n$, siendo “n” el número de átomos que hay en la sección transversal. Así entonces podríamos decir que $P = \sum_{i=0}^{i=n} P_i$ (P es la suma algebraica de todas las fuerzitas P_i que actúa sobre cada uno de los “n” átomos).

3.2 Tensión

El modelo atómico de las secciones transversales, resulta muy adecuado para entender en detalle el comportamiento de un sólido ideal. Pero los materiales reales distan mucho de esta definición, de hecho hay una gran asimetría entre lo ideal y la realidad.

Si dividimos a cada sección transversal en un número finito “N” de secciones unitarias elementales, podíamos decir que al aplicar la fuerza P, sobre cada sección unitaria elemental actúa una fuerza F_i . Así entonces diremos que $P = \sum_{i=0}^{i=N} F_i$, donde F_i nos indica la fuerza en Kg que le toca soportar a cada elemento unitario de superficie.

El número de secciones elementales unitarias se puede calcular fácilmente dividiendo el área de la sección transversal por el área unitaria: (siendo: $S = N \cdot S_i$).

Dado de $P = \sum F_i$ y $S = N \cdot S_i$, si dividimos miembro a miembro ambas expresiones, obtendremos: $P/S = \sum F_i/S_i$, pero como $S_i = 1$, entonces: $P/S = \sum F_i$

Siendo $\sigma = P/S$, si la fuerza P se mide en [Kg] y la sección en mm², las unidades de tensión serán: [Kg/mm²].

En general, serán: Unidades de Fuerza [F] / Unidades de superficie [L²]

Si la fuerza se mide en N (Newton) y la superficie en m², la tensión se medirá en [N/m²].

Si la fuerza se mide en Dinás, y la Superficie en cm², la tensión se medirá en [Dinas/cm²].

Ejemplo

¿Qué tensión se desarrolla en el interior de una barra de sección cuadrada de 20 mm de lado cuando se la tracciona con una fuerza de 1000 Kg.?

Solución

El área de la sección transversal de la barra es: $S = 20\text{mm} \times 20\text{mm} = 400\text{mm}^2$

Al aplicarle la fuerza de 1000 Kg., la tensión que se produce será:

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{1000\text{Kg}}{400\text{mm}^2} = 2.5\text{Kg/cm}^2 = \tau$$

3.3 Deformación Producida por Tracción

Al aplicar tracción a una barra de cualquier sección, esta sufre un pequeño alargamiento (dentro de ciertos límites) llamado ΔL , y que surge como diferencia entre la longitud inicial y final de la misma.

$$\Delta L = L_f - L_0$$

Si a ΔL la dividimos por L_0 obtenemos el alargamiento específico respecto a la longitud inicial de la barra, es decir el alargamiento por unidad de longitud. (cuanto se estira la barra por cada unidad de su propia longitud). Se lo designa con la letra “ ϵ ”.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

3.4 Ensayo de Tracción

Para conocer las características resistentes a tracción de un material cualquiera se lo somete a un ensayo de tracción. Para ello se utiliza una máquina universal de ensayos, como la que podemos observar en nuestro laboratorio de ensayos de materiales. Hay estrictas normas y protocolos, para realizar ensayos, que fueron acordadas en convenciones científicas internacionales.

Los ensayos de tracción se realizan con probetas perfectamente normalizadas, en cuanto a sus dimensiones, a fin de asegurar la repetibilidad internacional del ensayo. Se las prepara en un torno, atendiendo cuidadosamente su forma y tamaño.

La característica principal de una probeta de tracción para aceros es su parte central, cuya sección transversal es circular de área 1cm^2 , por lo que su diámetro es de 11,284mm. Esta sección se mantiene constante en una longitud L_0 , para ensancharse gradualmente

en sus extremos y brindar mejores posibilidades de sujeción a las mordazas de la máquina de ensayos.

La probeta se coloca entre mordazas, en la máquina de ensayos, y se la tracciona lentamente hasta romperla. En un papel milimetrado se grafica el estiramiento en función de la fuerza aplicada. Así, en el eje de las abscisas, se referencian los alargamientos y en el eje de las ordenadas, el esfuerzo en Kg o en N (newtons).

El problema de obtener resultados tan específicos, es que luego no se puede utilizar los datos obtenidos en una aplicación real, cuando por ejemplo cambia el diámetro, o la forma de la sección. Por lo que habría que realizar infinidad de ensayos, para distintos materiales, con distintas formas, y con distintas dimensiones.

Para evitar esto, los investigadores han propuesto reemplazar la fuerza de tracción por la Tensión de tracción, y el alargamiento ΔL , por el alargamiento específico ε , obteniendo así el gráfico Tensión – deformación específica (σ - ε). De esta manera se tiene una idea más concreta de cual es la tensión con que trabaja un material cuando se estira un determinado porcentaje, sin importar su forma ni su tamaño, y estos datos ahora se pueden aplicar a cualquier cálculo de dimensionamiento o verificación de elementos estructurales o de máquinas en la realidad.

3.5 Gráficos σ - ε para aceros

Para aceros se obtienen gráficos similares al de la. Hay varios sectores bien definidos. El tramo O-A, recto, en el cual la deformación es proporcional a la tensión, es decir la probeta se alarga en forma correspondiente a la carga (mayor carga - mayor deformación). El tramo A-B en el cual se produce un estiramiento pronunciado sin que aumente la carga, que fluctúa en un rango muy pequeño, pero apreciable. A este tramo se le llama Período de Fluencia.

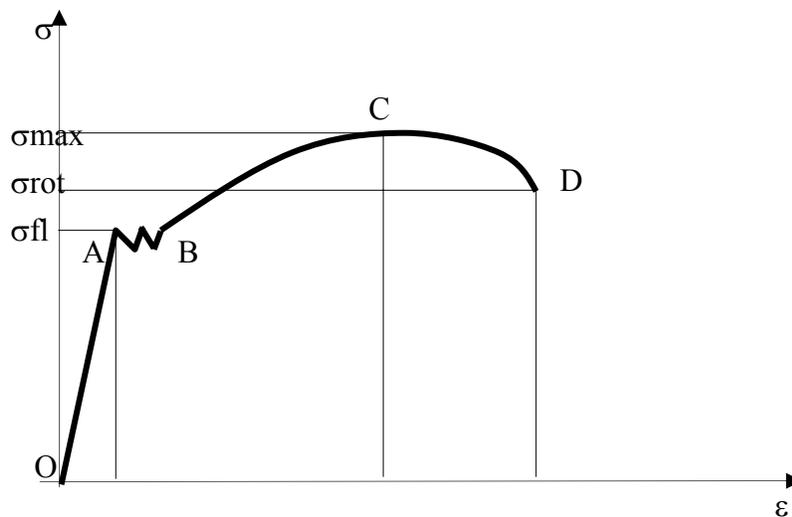


Figura 33 Diagrama Esfuerzo-Deformación

El tramo B-D nos indica que la probeta se estira considerablemente, es la zona de deformación plástica, la tensión aumenta hasta el punto C, en que se alcanza el mayor valor de carga aplicada (σ_{max}). Allí comienza a producirse una marcada disminución de la sección transversal de la probeta, fenómeno denominado “estricción”. A partir de este punto entonces la tensión disminuye su valor y la probeta sigue estirándose y disminuyendo su sección, hasta que finalmente rompe, (punto D), la tensión en este punto se llama Tensión de Rotura, y tiene menor valor que la máxima.

Problema 6

Una viga cargada (Figura 34) se fija con un pasador a la pared en el punto A, y es apoyada por una barra , unido a la pared en el punto D y a la viga en B. La viga tiene una carga de 6.000 libras que actúan hacia abajo en el punto C. La barra tiene ángulo de 25° con respecto a la viga. La sección transversal de la viga es un W8 x 24, con las características mostradas en la Figura 34. Determinar la tensión axial máxima que actúan en la sección transversal de la viga.

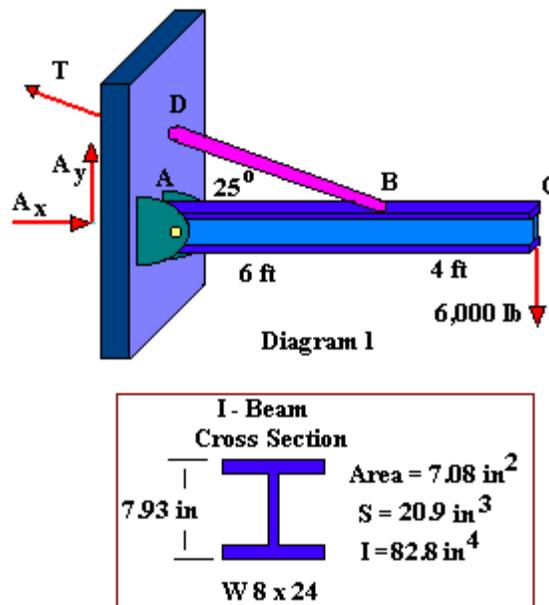


Figura 34 Diagrama de la viga y sección transversal

Solución:

Primero aplicamos equilibrio estático a la viga y determinamos las reacciones externas en el apoyo en el punto A.

$$\text{Suma de la fuerzas en } x = A_x - T \cos 25^\circ = 0$$

$$\text{Suma de fuerzas en } y = A_y + T \sin 25^\circ - 6.000 \text{ lb} = 0$$

$$\text{Suma de momentos en A} = -6000 \text{ lb} (10\text{ft}) + T \cos 25^\circ (2,8\text{ft}) = 0 \text{ (donde } 2,8 \text{ ft} = \text{distancia de A a D)}$$

Al solucionar: $T = 23640$ libras; $A_x = 21430$ libras, y $A_y = -3990$ lb. (A_y actúa hacia abajo)

Se dibujan los diagramas de fuerza cortante y momento flector y se utiliza el diagrama de momento flector para determinar la tensión máxima en la viga:

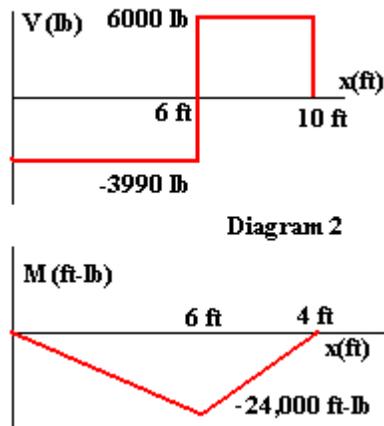


Figura 35 Diagrama de fuerza cortante y momento flector

Es necesario considerar la tensión axial debido a la fuerza horizontal que actúa en la viga. En la sección AB la viga está en compresión con la fuerza axial horizontal de 21.430 libras. (debido a la fuerza Ax y al componente horizontal de la fuerza DB de la barra.) En la sección BC, no hay fuerza axial horizontal debido a que no hay una fuerza horizontal externa. Es decir, la sección AB está en compresión, pero la sección BC no está experimentando una tensión horizontal normal, puesto que está a la derecha de donde se une la barra a la viga. (sin embargo, hay una tensión de flexión horizontal debido al momento de flexión, debido a la carga verticales aplicada.)

Considerando la fuerza actuar a lo largo del centro de figura de la viga, la tensión axial horizontal compresiva en la sección AB está dada por:

$$\frac{F}{A} = \frac{21430\text{lb}}{7.08\text{in}^2} = 3.030 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

Hay una tensión de flexión también que actúa en la viga. La tensión de flexión máxima ocurre en el borde externo de la viga, y en el punto donde la viga soporta el máximo momento de flexión. De nuestro diagrama de momento flector, vemos que el momento de flexión máximo ocurre a 6 pies del extremo izquierdo, y tenemos un valor de -24.000 ft-lb. = -288.000 in-lb. (el signo negativo indica que la parte superior de la viga está en tensión y la parte inferior de la viga está en compresión.)

Tensión de flexión máxima = M/S donde S es el módulo de la sección. En este ejemplo S = 20,9 in³.

$$\text{Tensión de flexión máxima} = \frac{288000\text{lb}\times\text{in}}{20.9\text{in}^3} = 13780 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

Podemos combinar las tensiones axiales para determinar la tensión axial máxima.

$$\text{Parte superior de la viga: } 13780 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} + 3030 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 16810 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

$$\text{Parte inferior de la viga: } 13780 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} - 3030 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 10750 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

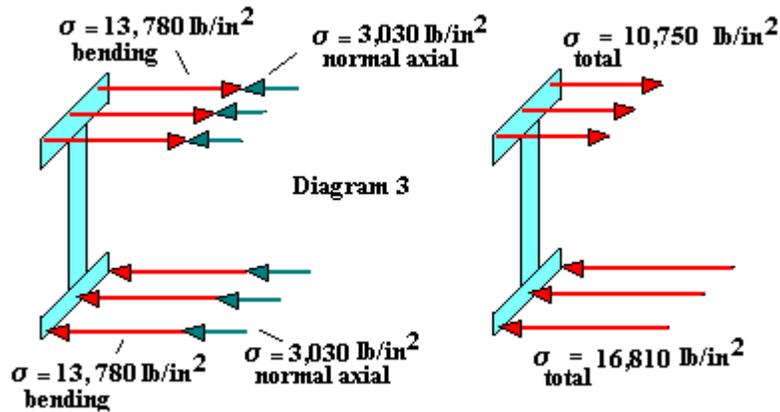
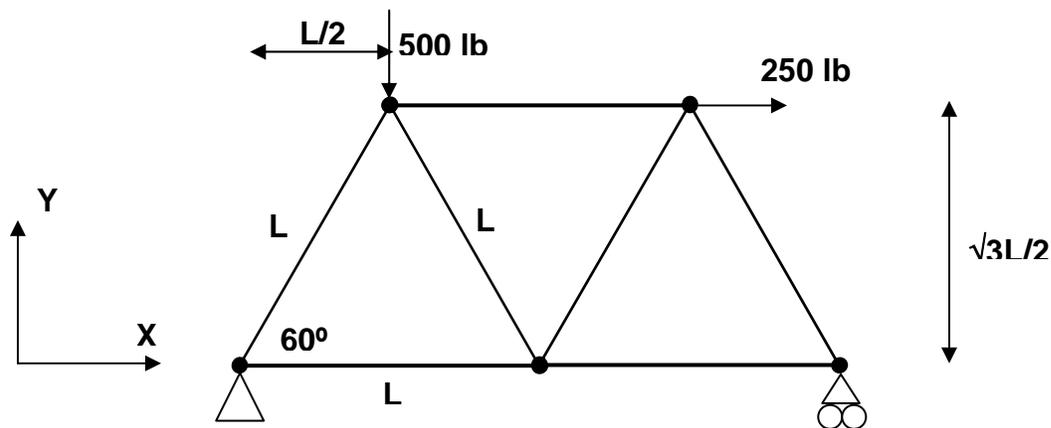


Figura 36 Diagrama de esfuerzos en la sección de la viga

3.6 Análisis de Cerchas – Método de las Uniones

Determinar las fuerzas internas de cada uno de los miembros de la siguiente cercha:



Solución:

Un elemento cercha es un caso especial de los elementos estructurales, en el cual todas las fuerzas tienen la dirección del eje del elemento. En el método de las uniones se analiza toda la cercha, unión por unión, calculando las fuerzas internas de los miembros mediante la aplicación de las condiciones de equilibrio en cada punto.

Es necesario numerar los nodos de la cercha para tener un orden en el momento de definir las ecuaciones de equilibrio:

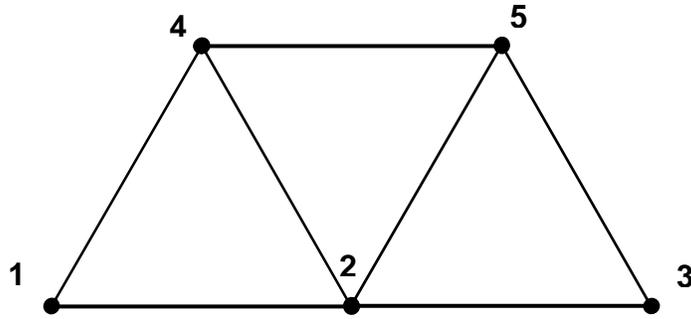


Figura 37 Numeración de las uniones

El análisis se inicia, con el cálculo de las reacciones externas de la estructura, mediante las condiciones de equilibrio con las fuerzas externas, haciendo equilibrio de fuerzas en dirección X, en dirección Y y equilibrio de momentos con el punto 1:

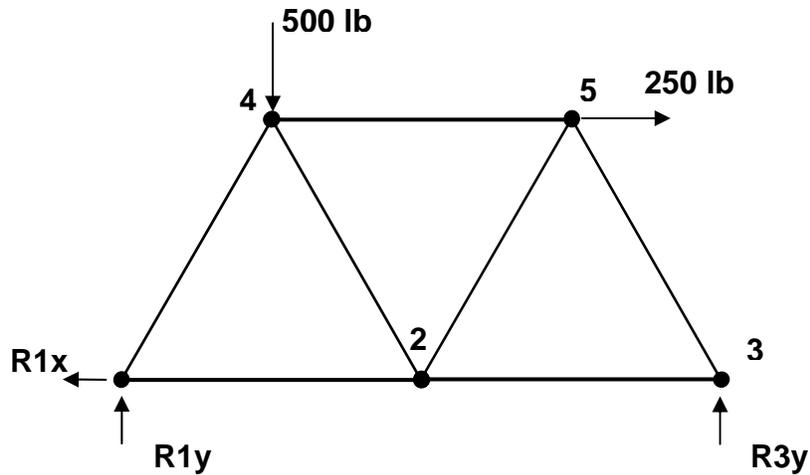
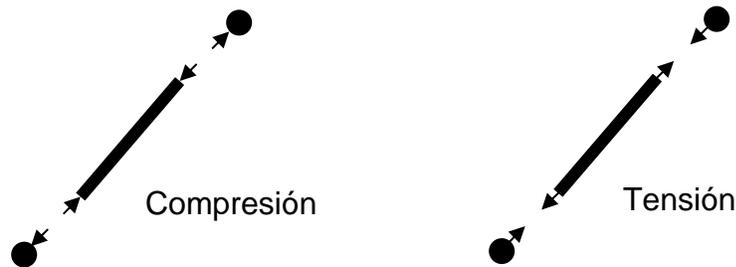


Figura 38 Diagrama de Fuerzas externas

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad R_{1x} + 250 = 0 \\ & \quad R_{1x} = -250 \text{ lb} \\ \sum F_y = 0 & \quad R_{1y} + R_{3y} - 500 = 0 \\ & \quad R_{1y} = 500 - R_{3y} \\ \sum M_1 = 0 & \quad 500 \frac{L}{2} + 250 \frac{\sqrt{3}}{2} L - R_{3y} 2L = 0 \\ & \quad 500 \frac{1}{2} + 250 \frac{\sqrt{3}}{2} - R_{3y} 2 = 0 \\ & \quad 2R_{3y} = 250 + 250 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & \quad R_{3y} = 233 \text{ lb} \\ & \quad R_{1y} = 500 - R_{3y} = 500 - 233 = 267 \text{ lb} \end{aligned}$$

A continuación se aplican las condiciones de equilibrio en cada una de las uniones de la estructura. En el equilibrio intervienen las fuerzas internas y las fuerzas externas aplicadas en el nodo. Si se tiene en cuenta el peso propio del elemento, es necesario distribuir por partes iguales el peso en cada uno de los nodos del elemento, en dirección de la fuerza de gravedad (Generalmente negativo en dirección Y). No es necesario conocer previamente la dirección de la fuerza interna en cada elemento. El signo del resultado definirá si la dirección está correctamente asignada o si va en dirección contraria (Tensión o compresión). Es necesario ser consecuente con la dirección de las fuerzas asumida en los nodos de un mismo elemento (Igual valor, dirección opuesta):



Si se suponen las fuerzas internas de los elementos como fuerzas de tensión (Las fuerzas salen de la unión), el resultado positivo indicará que la suposición es correcta, por su parte, si el resultado es negativo la fuerza es de compresión.

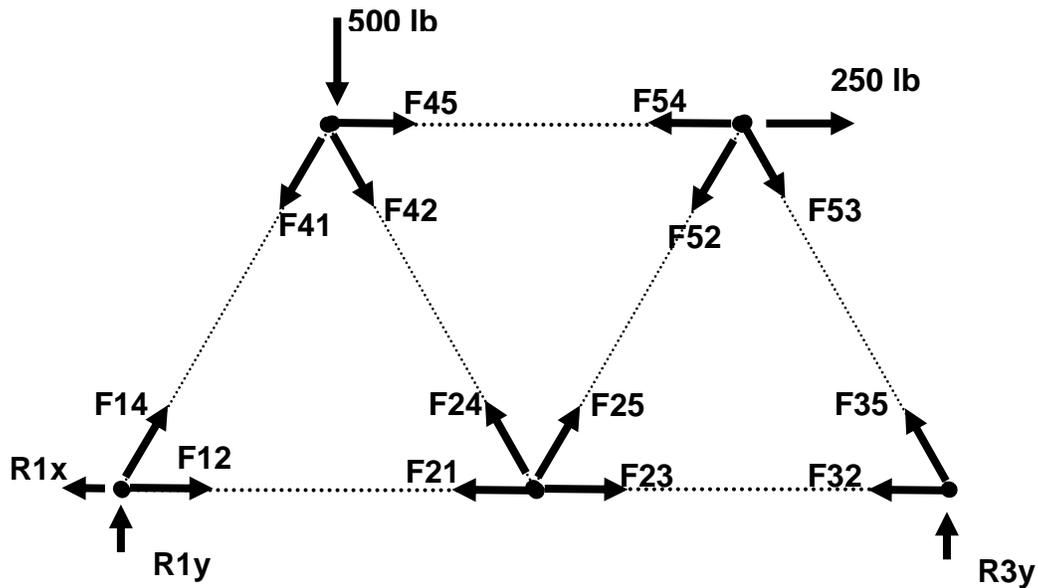


Figura 39 Diagrama de fuerzas internas y externas

Haciendo equilibrio en cada una de las uniones tenemos:

Nodo 1:

$$\sum F_x = 0 \quad -250 + F_{12} + F_{14} \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 267 + F_{14} \sin 60^\circ = 0$$

Nodo 2:

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{21} + F_{23} - F_{24} \cos 60^\circ + F_{25} \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{24} \sin 60^\circ + F_{25} \sin 60^\circ = 0$$

Nodo 3:

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{32} - F_{35} \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 233 + F_{35} \sin 60^\circ = 0$$

Nodo 4:

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{41} \cos 60^\circ + F_{42} \cos 60^\circ + F_{45} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -500 - F_{41} \sin 60^\circ - F_{42} \sin 60^\circ = 0$$

Nodo 5:

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{54} - F_{52} \cos 60^\circ + F_{53} \cos 60^\circ + 250 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_{52} \sin 60^\circ - F_{53} \sin 60^\circ = 0$$

Generando un arreglo de las ecuaciones de equilibrio, en el que cada fila corresponda a cada una de las ecuaciones y cada columna corresponda a cada una de las fuerzas (incógnitas), obtenemos un sistema lineal de ecuaciones:

F12	F23	F14	F24	F25	F35	F45	
1	0	cos60°	0	0	0	0	250
0	0	sen60°	0	0	0	0	-267
0	0	-cos60°	cos60°	0	0	1	0
0	0	-sen60°	-sen60°	0	0	0	500
-1	1	0	-cos60°	cos60°	0	0	0
0	0	0	sen60°	sen60°	0	0	0
0	-1	0	0	0	-cos60°	0	0
0	0	0	0	0	sen60°	0	-233
0	0	0	0	-cos60°	cos60°	-1	-250
0	0	0	0	-sen60°	-sen60°	0	0

Recomendación

Para resolver este sistema de ecuaciones se puede implementar el código en matlab, ubicado en la dirección:

<http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitech/triangularsupst.m>

en el cual se hace la triangulación superior de la matriz expandida y luego se hace la sustitución regresiva del sistema, aplicando la eliminación gaussiana.

Es necesario definir la matriz A y el vector B del sistema a solucionar: $AX=B$.

Aplicando la rutina llamada *triangularsupst(A,B)*, que toma una matriz cuadrada de N x N elementos y un vector de N elementos, y después de generar la eliminación gaussiana a la matriz expandida [A | B], calcula el vector solución X mediante la sustitución regresiva. Las matrices utilizadas en este ejemplo se encuentran en la dirección:

http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitech/matrices_cercha.mat

```
A =
    1.0000         0    0.5000         0         0         0         0
         0         0    0.8660         0         0         0         0
         0         0   -0.5000    0.5000         0         0    1.0000
         0         0   -0.8660   -0.8660         0         0         0
   -1.0000    1.0000         0   -0.5000    0.5000         0         0
         0         0         0    0.8660    0.8660         0         0
         0   -1.0000         0         0         0   -0.5000         0
         0         0         0         0         0         0    0.8660         0
         0         0         0         0         0   -0.5000    0.5000   -1.0000
         0         0         0         0   -0.8660   -0.8660         0

>> B
B =
    250   -267         0    500         0         0         0   -233   -250         0

>>
```

```
>> triangulasupsust
```

```
Aug =
```

```
1.0000    0    0.5000    0    0    0    0    250.0000
    0    1.0000    0.5000   -0.5000    0.5000    0    0    250.0000
    0    0   -0.8660   -0.8660    0    0    0    500.0000
    0    0   -0.0000    1.0000    0    0    1.0000  -288.6836
    0    0    0    0    0.8660    0   -0.8660    250.0000
    0    0    0.0000    0    0.0000   -0.5000    1.5000    105.6582
    0    0    0    0    0    0    0.8660   -17.0000
    0    0    0    0    0    0.8660    0  -233.0000
    0    0    0    0   -0.5000    0.5000   -1.0000  -250.0000
    0    0    0    0   -0.8660   -0.8660    0    0
```

```
X =
```

```
404.1570
135.1039
-308.3141
-269.0531
269.0531
-270.2079
-19.6305
```

```
>>
```

De esta manera la solución del sistema lineal de ecuaciones arroja los siguientes resultados:

F12=	404 lb	Tensión
F23=	135 lb	Tensión
F14=	-308 lb	Compresión
F24=	-269 lb	Compresión
F25=	269 lb	Tensión
F35=	-269 lb	Compresión
F45=	-19 lb	Compresión

Este resultado nos da una idea de cómo se está comportando la estructura ante la sollicitación de carga, y nos permite ubicar las zonas de tensión y compresión.

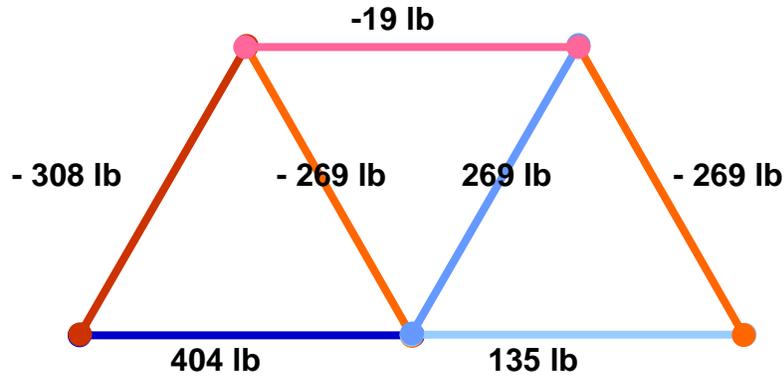


Figura 40 Fuerzas internas en los elementos de la cercha

Los esfuerzos que se presentan en cada uno de los elementos de la cercha están dados por la expresión:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

donde σ es el esfuerzo normal (axial) , F la fuerza interna del elemento y A el área de la sección transversal del elemento.

La selección del material para la construcción de la estructura, depende de la resistencia del mismo, la cual no debe ser inferior al máximo esfuerzo presente en la estructura. La resistencia del material está dada por el esfuerzo σ_y (esfuerzo antes de la fluencia o falla del material), el cual es determinado mediante pruebas de tensión y compresión en el laboratorio.

4 Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas es una clásica aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el modelo matemático de un sistema continuo. Es valioso familiarizarse con ésta aproximación porque tal conocimiento reforzará la comprensión de los procedimientos de elementos finitos.

Básicamente, en una solución por diferencias finitas, las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico fácilmente resoluble por medios comunes (especialmente matriciales).

4.1 Método de la Expansión de Taylor

El *método de expansión de Taylor* es una forma alternativa de obtener aproximaciones de diferencia. Este método no solo deduce las fórmulas de diferencia sistemáticamente, sino que también deduce los términos de error.

Para una derivada de p -ésimo orden, el número mínimo de puntos de datos requeridos para deducir una aproximación de diferencia es $p+1$, así por ejemplo una aproximación de diferencia para la primera derivada de una función necesita por lo menos de dos puntos de datos.

Consideremos la deducción de la aproximación de diferencia para $f'_i = f'(x_i)$ en términos de $f_i = f(x_i) \wedge f_{i+1} = f(x_{i+1})$. La expansión de Taylor de f_{i+1} alrededor de x_i es

$$f_{i+1} = f_i + h \cdot f'_i + \frac{h^2}{2} \cdot f''_i + \frac{h^3}{6} \cdot f'''_i + \frac{h^4}{24} \cdot f^{IV}_i + \dots$$

Resolviendo la ecuación anterior para la primera derivada, tenemos

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''_i - \frac{h^2}{6} \cdot f'''_i - \dots$$

Si ignoramos todos los términos con excepción del primero del miembro derecho de la ecuación anterior, obtendremos la aproximación por diferencia *hacia adelante*. Los términos que se ignoran constituyen el error de truncado, representado por el término inicial, $-(h/2) \cdot f''_i$.

La aproximación de diferencia hacia adelante, con el error de truncado incluido, se expresa como $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + E$ (3), donde $E \approx -\frac{h}{2} \cdot f''_i$.

4.2 Expresiones de diferencias, cuyo uso es frecuente.

Primera Derivada

Aproximaciones de diferencia hacia adelante

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + E \quad ; \quad E \approx -\frac{1}{2} \cdot h \cdot f''_i$$

Aproximaciones de diferencia hacia atrás

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{2} \cdot h \cdot f''_i$$

Segunda Derivada

Aproximaciones de diferencias hacia adelante

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2 \cdot f_{i+1} + f_i}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx h \cdot f_i'''$$

Aproximaciones de diferencia hacia atrás

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2 \cdot f_{i-1} + f_i}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx h \cdot f_i'''$$

4.3 Simulación de la Propagación de Onda

4.3.1 Introducción a las oscilaciones

- Una oscilación es un movimiento periódico en torno de un punto de equilibrio estable. Las ecuaciones de movimiento del oscilador armónico simple son:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{donde } \omega \text{ es la frecuencia de angular.}$$

con la solución general:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

y la solución específica

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \delta) \quad \text{donde } \delta \text{ es el ángulo de desfase de la oscilación.}$$

si la condición inicial es

$$\dot{x} \Big|_{x=x_m} = 0$$

- El oscilador es amortiguado, cuando existe una fuerza de roce que le hace perder energía. La ecuación de movimiento se cambia a:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{donde } \gamma \text{ es el coeficiente de amortiguamiento de la oscilación.}$$

- Se distinguen los casos sobre-amortiguado, amortiguamiento crítico y amortiguado, dependiendo de la relación de la fuerza de roce y el sistema del oscilador. Sólo en el último caso hay oscilaciones, con la amplitud decayendo de manera exponencial. La solución para este caso es:

$$x(t) = x_m e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta)$$

- El oscilador forzado resulta, cuando una fuerza externa periódica con frecuencia ω actúa sobre un oscilador armónico. La ecuación de movimiento en este caso es:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

con la solución

$$x(t) = x_m(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega))$$

- Cuando la frecuencia ω de la fuerza externa es igual a la frecuencia característica ω_0 del sistema, se habla de resonancia. En este caso, la amplitud logra su valor máximo: (sólo para amortiguamiento débil)

$$x_{m,\max} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0}$$

- Cuando la amplitud F_0 de la fuerza externa es grande y el amortiguamiento es débil, puede resultar una resonancia catastrófica, donde la energía de la oscilación excede la energía adhesiva del material con el resultado que éste queda destruido. Figura 41.



Figura 41 Puente de Tacoma. Colapsó en 1940 por entrar en resonancia con una ráfaga de viento.

4.3.2 Ecuación de Onda

- Un pulso se puede describir por la función $y = y(x, t)$, si el pulso no se deforma al propagarse (medio no dispersivo) se puede describir como:

$$y = y(x, t) = y(x - vt)$$

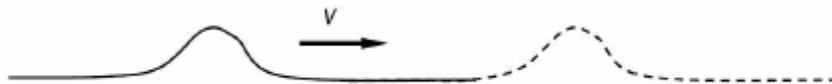


Figura 42 Pulso viajero

- La onda unidimensional (Figura 43), no dispersiva que viaja con velocidad v , se puede describir por:

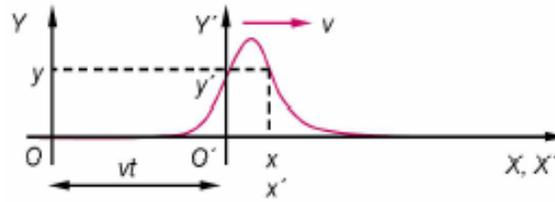


Figura 43 Onda unidimensional

$y = y(x, t)$ con el punto O como referencia.

$y' = y'(x')$ con el punto O' como referencia.

- Con el sistema de coordenadas O' moviéndose junto con el pulso con velocidad v .

$$x' = x - vt \quad y' = y$$

$$\Rightarrow y = y(x, t) = y(x - vt)$$

en general:

$y(x, t) = y(x - vt)$, si la onda viaja hacia la derecha.

$y(x, t) = y(x + vt)$, si la onda viaja hacia la izquierda.

- La forma general para una onda de una dimensión $\xi(x, t) = f(x \mp vt)$, es función de dos variables.

Usando derivadas parciales:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} = \text{por que } x' = x \mp vt \rightarrow \frac{\partial x'}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mp v \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\mp v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = (\mp v)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ es la ecuación de onda en una dimensión.}$$

4.3.3 Método de diferencias finitas para la ecuación de onda en una dimensión

La ecuación de ondas en una dimensión aparece en el análisis de una gran cantidad de fenómenos físicos, desde las vibraciones de una cuerda hasta sistemas de osciladores acoplados, propagación de luz en medios, ... La forma de esta ecuación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $v(x, t)$ representa la velocidad de propagación de la onda en el punto x y el instante t . Esta ecuación debe complementarse con unas condiciones de contorno y/o iniciales apropiadas. Por ejemplo el problema puro de valores iniciales requiere especificar:

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ y } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x)$$

que puede suplementarse con unas condiciones de contorno del tipo:

$$u(0, t) = g(t), u(L, t) = h(t)$$

El esquema de solución apropiado para la ecuación diferencial de la propagación de onda es:

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} = v^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Este esquema es completamente explícito pero requiere conocer la solución en dos niveles temporales para poder arrancar.

El esquema de diferencias finitas así construido tiene un error de truncación desde el segundo término, ya que solo aproxima la ecuación con una serie de dos términos.

Existen requerimientos de estabilidad para el esquema de diferencias finitas. Uno de ellos es $\Delta t \leq \sqrt{\frac{3}{8}} \left(\frac{\Delta x}{v} \right)$, donde Δt es el paso en el tiempo y Δx es el tamaño del paso en el espacio y v es la velocidad de propagación.

Con el fin de disminuir la dispersión numérica es necesario lograr que la longitud de onda de la señal esté contenida en no menos de 5 pasos en el espacio y no más de 11. Por lo que el periodo calculado como el inverso de la frecuencia $T = \frac{1}{f}$, multiplicado por la velocidad de propagación de la onda debe ser igual a la longitud de 5 a 11 pasos en el espacio.

Es por esto que los parámetros para la solución de la ecuación de onda, como el paso en el tiempo y el espacio, por medio del esquema de diferencias finitas, dependen de la frecuencia de la fuente que transmite la señal y de la velocidad de propagación del medio en el que es transmitida.

Algunos rangos de frecuencia y de velocidad de propagación son mostrados en la Tabla 1 y en la Tabla 2 .

Fuente	Frecuencia
Trueno	20 Hz a 80 Hz
Hablar, el sonido de la voz	250 Hz a 6,000 Hz
Una cantante de opera en un tono alto	2,000 Hz

Tabla 1 Frecuencia de algunos sonidos comunes

Medio	Velocidad de Propagación del sonido
Aire	344 m/s
Agua	1440m/s
Acero	5000 m/s

Tabla 2 Velocidad de propagación en diferentes medios

Problema 7

Usar el código en Matlab de la función onda1D, que implementa el esquema de diferencias finitas, ubicado en la dirección:

<http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitec/onda1D.m>

Para simular la propagación del sonido generado por un trueno y la voz de una persona, a través del aire y del agua.

4.3.4 Principio de Huygens

El principio de Huygens afirma que todo punto de un frente de onda inicial puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias que se extienden en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda del que proceden. Con ello puede definirse un nuevo frente de onda que envuelve las ondas secundarias. Cuando las ondas secundarias llegan a otro medio u objeto, cada punto del límite entre los medios se convierte en una fuente de dos conjuntos de ondas. El conjunto reflejado vuelve al primer medio, y el conjunto refractado entra en el segundo medio. Por esta razón, el diseño de los espacios con fines acústicos, como los teatros o salas de presentación, contempla los efectos de las superficies en la generación de nuevas ondas acústicas.

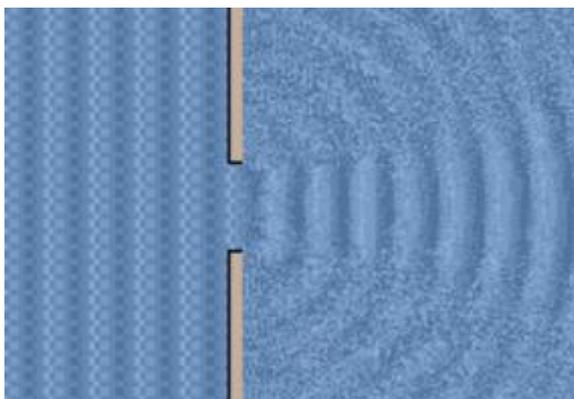


Figura 44 Generación de nuevas fuentes de onda

Ejercicio

Comprobar los efectos de los obstáculos en los frentes de onda y simular la superposición de ondas.

Para esto es necesario descargar el programa ubicado en la dirección:
<http://laboratoriomatematicas.uniandes.edu.co/semarquitec/waves.zip>

5 Método de los Elementos Finitos

5.1 Introducción

Con el desarrollo de los computadores se ha facilitado en gran medida la solución de los sistemas de ecuaciones lineales, lo que ha representado un retorno a los procedimientos tradicionales de cálculo. Estos métodos matriciales implican un gran número de operaciones repetitivas particularmente adecuadas para el cálculo automático y han sido formuladas con el fin de obtener las mayores ventajas de los computadores.

El cálculo de ciertas estructuras se complica si su forma geométrica y/o cargas adoptan formas irregulares en cuyo caso es de aplicación el método de los elementos finitos consistente en sustituir la estructura por un modelo matemático de un cierto número de

elementos independientes, denominados elementos finitos o discretos, unidos entre si a través de un número finito de puntos o nodos.

5.1.1 Breve introducción histórica:

- 1950 Aplicación de métodos matriciales en análisis de estructuras.
- 1950 Introducción de los desplazamientos y método de matriz de rigidez para estructuras aeroespaciales complejas.
- 1960 Nacimiento del nombre “Elementos Finitos”.
- 1970 Aplicaciones de modelos de Elementos Finitos principalmente en el campo aeroespacial y la industria del automóvil.
- 1977 Los Modelos de Elementos Finitos son la herramienta numérica para análisis estructural.

5.1.2 Terminología

- Las estructuras complejas se subdividen en puntos discretos (NODOS) los cuales están interconectados entre si mediante elementos.
- Cada NODO tiene 6 posibilidades independientes de movimiento, 3 traslaciones y 3 rotaciones.
- Estas posibilidades de movimiento independientes se denominan grados de libertad (DOF).
- Los desplazamientos de los nodos son compatibles con la deformación del elemento.
- Las fuerzas aplicadas a la estructura, se introducen como un sistema de argas equivalentes de cargas sobre los nodos de tal manera que se imula las acciones reales que van a sufrir.
- Las condiciones de apoyo de la estructura, se introducen como estricciones en giro y desplazamiento sobre los nodos.

5.1.3 Como se crea un modelo de elementos finitos?

A cada elemento finito estudiado aisladamente se le aplica la teoría clásica de cálculo, lo que es posible dada la forma sencilla elegida (triángulos, rectángulos,...) estableciéndose las condiciones de contorno y equilibrio a través de los nodos. Esta discretización de la estructura permite su resolución planteando un sistema de ecuaciones lineales y se aplica fácilmente a cualquier estructura por complicadas que sean sus características geométricas y condiciones de carga. Para llevar a cabo esto, se necesitan un gran número de operaciones matemáticas, que debido a naturaleza repetitiva se adaptan con total normalidad a la programación numérica y a su resolución con ordenador.

Fundamentalmente, la aplicación del método consiste en plantear para cada elemento finito la matriz de rigidez que relaciona las fuerzas con las deformaciones. A continuación se procede al ensamblaje de la matriz de rigidez total para toda la estructura.

Los elementos finitos se enlazan entre ellos solamente mediante los nodos, lo que significa que las condiciones de contorno de la estructura no se satisfacen a lo largo de los lados. No obstante, a veces, la elección adecuada de un modelo de deformación para los elementos finitos puede satisfacer esta condición en algunos elementos o en todos.

En general, dado que el método de cálculo mediante elementos finitos es un procedimiento aproximado, la precisión requerida aumenta directamente con el número de elementos empleados. Evidentemente, un mayor número de elementos necesita mayor tiempo de cálculo por lo que aumentaría el costo.

Resulta ventajoso en algunos casos utilizar una discretización gradual a fin de conseguir un estudio más detallado en aquellas zonas donde se tiene previsto que puedan concentrarse tensiones. Esta discretización resulta eficaz y rebaja el tiempo de cálculo sin perder precisión. No es posible concretar el número de elementos que se requieren para obtener en cada caso la solución más satisfactoria, ya que va a depender de la estructura objeto de estudio. La elección de la subdivisión más conveniente ha de realizarse de acuerdo con la experiencia, basándose, si es posible, en resultados obtenidos mediante ensayos. En cualquier caso, se deben poner en práctica soluciones que hagan intervenir mallas de diferentes dimensiones con el fin de asegurar la convergencia de los resultados.

Las cargas externas aplicadas a la estructura se sustituyen por sistemas de fuerzas equivalentes concentradas en los nodos. De existir cargas puntuales ha de distribuirse la malla de manera que los nodos coincidan con sus puntos de aplicación.

5.1.4 Etapas para el cálculo con ordenador

Se distinguen tres bloques bien diferenciados que componen el proceso de cálculo de estructuras mediante el empleo de elementos finitos. Se enumeran:

- **PREPROCESADOR:** El objetivo principal del preprocesador es conseguir la estructura mallada mediante nodos y elementos. Estos, son los puntos de control de la estructura mallada a través de los cuales se introducen datos y se obtienen resultados.
- **SOLVER:** Parte interna del proceso. Resolución de sistemas de ecuaciones a partir de los datos introducidos.
- **POSTPROCESADOR:** Análisis de resultados.

En Figura 45 se resumen las etapas principales en base a la programación con ordenador cuando se emplea el método de cálculo de estructuras mediante elementos finitos.

5.1.5 Creación de geometría y entrada de datos

En la entrada de datos se define la geometría de la estructura, las propiedades del material, las cargas que ha de soportar y los apoyos que la sustentan.

A modo de ejemplo se detalla a continuación la que pudiera ser una secuencia idónea de introducción de datos a la hora de crear un modelo de elementos finitos.

1. Crear o importar geometría.
2. Especificar material y propiedades de cada elemento que componen el modelo.
3. Mallado de la geometría mediante elementos y nodos.
4. Aplicar condiciones de contorno o restricciones de movimientos en los nodos según correspondan.
5. Introducir sistemas de cargas equivalentes que simulen la puesta en servicio de la estructura.

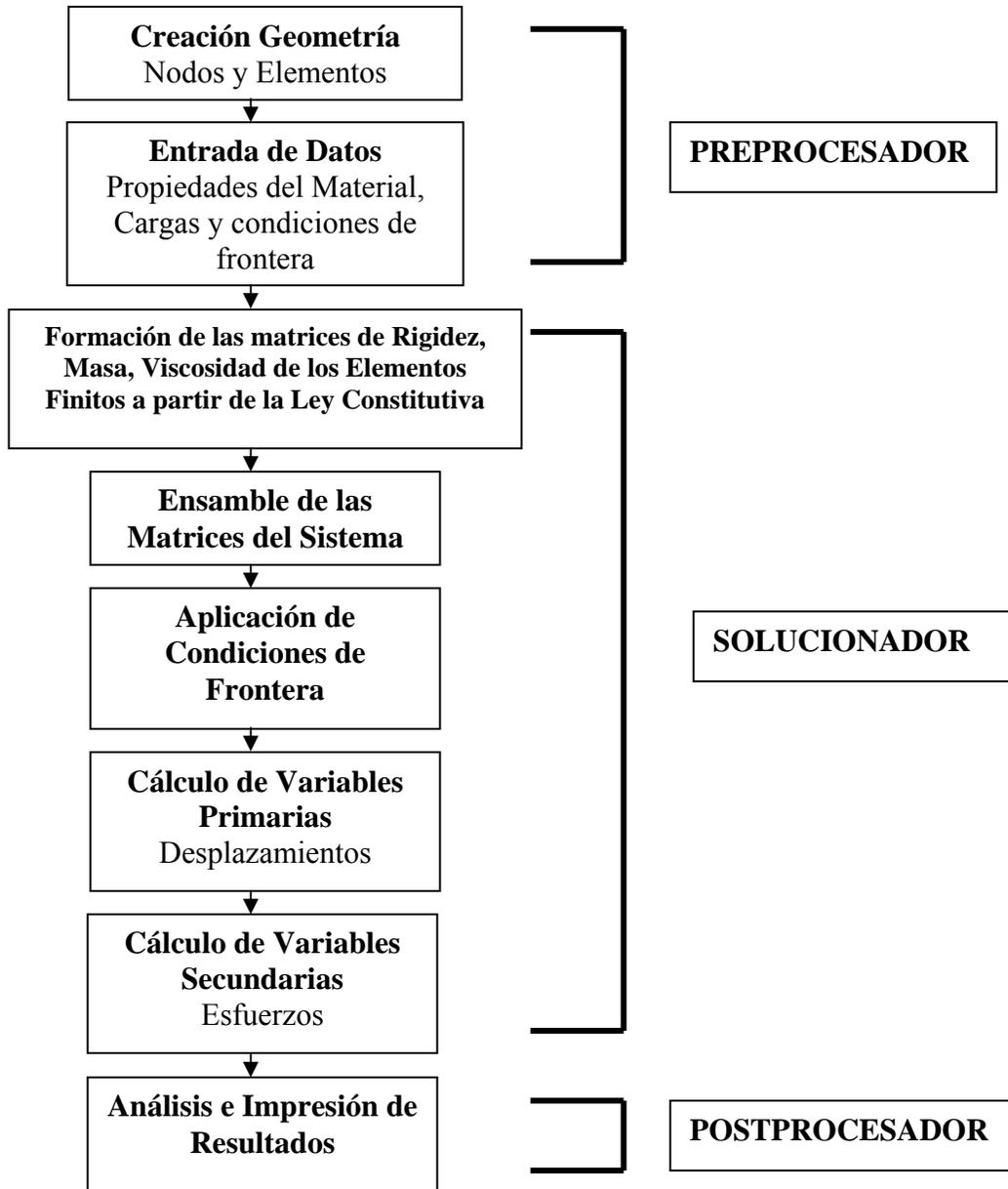


Figura 45 Pasos en el análisis estructural por el Método de Elementos Finitos usando programas de computador

5.1.6 Matriz de rigidez: Obtención de la matriz de rigidez en cada elemento

En esencia el método de los elementos finitos se resuelve cuando en cada elemento se plantea la ecuación que liga las deformaciones de los nodos con las fuerzas en ella aplicadas a través de la matriz de rigidez. El procedimiento que se sigue consiste en suponer unas leyes, generalmente polinómicas, que definen los recorridos de los puntos del elemento finito en función de las coordenadas asignadas a los nodos. A partir de aquí, se deducen para los nodos, aplicando el Teorema de los Trabajos Virtuales, las fuerzas equivalentes al estado tensional creado como consecuencia de los recorridos asignados a los puntos del elemento. Finalmente se relacionan fuerzas en nodos y recorridos de estos, con lo que se define la matriz de rigidez.

5.1.7 Ensamblaje de la matriz: Obtención de la matriz de rigidez global

Tras la obtención de las matrices de rigidez de todos los elementos se procede a su ensamblaje a fin de calcular la matriz de rigidez $[K]$ de la totalidad de la estructura.

Dado que cada nodo puede tener hasta 6 grados de libertad, la estructura tendrá un número total de grados de libertad igual a 6 veces el número total de nodos del modelo. Con todo esto cabe esperar que la matriz de rigidez $[K]$ ha de ser una matriz cuadrada de orden 6 veces el número de nodos que componen la estructura.

5.1.8 Obtención de los desplazamientos

Consiste en la resolución de la ecuación $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$ empleándose para ello como procedimientos más adecuados el método de eliminación de Gauss, el de Cholesky y el iterativo de Gauss – Seidel. Esta es la fase que ocupa la mayor parte del tiempo de cálculo.

5.1.9 Obtención de tensiones:

A partir de la deducción de los desplazamientos en los nodos se obtienen las tensiones o fuerzas de sección para cada elemento finito.

5.2 Formulación

En el caso del método de las diferencias finitas, el dominio de la solución se divide en una malla con puntos o nodos, en los cuales se aplica la ecuación diferencial, donde las derivadas parciales se reemplazan por diferencias finitas. En particular el método de las diferencias finitas es difícil de aplicar en sistemas con una geometría irregular, con condiciones de frontera no usuales o de composición heterogénea.

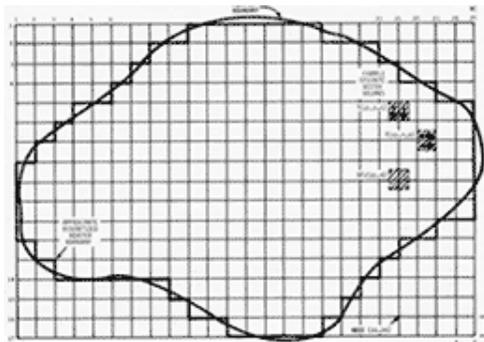


Figura 46 División del dominio por diferencias finitas

La técnica del método de los elementos finitos divide el dominio de la solución en regiones con formas sencillas o “elementos”. Por lo que se debe desarrollar una solución aproximada de la ecuación diferencial para cada uno de estos elementos. La solución se genera, uniendo o “ensamblando” las soluciones individuales, teniendo cuidado de asegurar la continuidad de las fronteras entre los elementos.

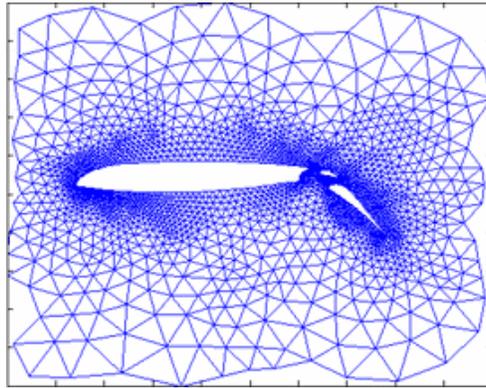


Figura 47 División del dominio por elementos finitos

Es necesario desarrollar ecuaciones para aproximar la solución de cada elemento:

- Primero, se debe elegir una función apropiada con coeficientes desconocidos que aproximará la solución.
- Segundo, se evalúan los coeficientes de modo que la función aproxime la solución de manera óptima.

Debido a su fácil manipulación matemática, usualmente se usan polinomios. En el caso unidimensional, la alternativa más sencilla es: $u(x) = a_0 + a_1x$, donde $u(x)$ es la variable dependiente, a_0 y a_1 son constantes y x es la variable independiente.

Esta función seleccionada debe pasar a través de los valores de $u(x)$ en los puntos extremos del elemento en x_1 y x_2 . Por lo tanto:

$$u_1 = a_0 + a_1x_1$$

$$u_2 = a_0 + a_1x_2$$

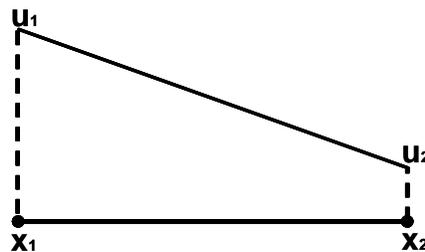


Figura 48 Función lineal de aproximación

Igualando y despejando los coeficientes, se obtiene:

$$a_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación de aproximación y después de reagrupar, se obtiene:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

donde

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Estas ecuaciones son denominadas: funciones de interpolación.

La función $u = N_1 u_1 + N_2 u_2$ es en realidad el polinomio de interpolación de primer grado de Lagrange, y ofrece un medio para predecir valores intermedios entre valores dados u_1 y u_2 en los nodos.

Una vez elegida la función de interpolación, se debe desarrollar la ecuación que rige el comportamiento del elemento.

Existen varios métodos para este propósito, entre los cuales se encuentran el método directo, el método de los residuos ponderados y el método variacional. El resultado de estos métodos es análogo al ajuste de curvas, sin embargo en lugar de ajustar funciones a datos, estos métodos especifican relaciones entre las incógnitas de la ecuación (4) que satisfacen de manera óptima la ecuación diferencial.

Matemáticamente las ecuaciones del elemento resultantes a menudo consisten en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que puede expresarse en forma matricial, por ejemplo: $[k]\{u\} = \{F\}$, donde $[k]$ = una propiedad del elemento o matriz de rigidez, $\{u\}$ = vector columna de las incógnitas en los nodos y $\{F\}$ = vector columna determinado por el efecto de cualquier influencia externa aplicada a los nodos.

Las ecuaciones de los elementos individuales deben unirse o ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. Este ensamblaje está regido por el concepto de continuidad. Es decir, las soluciones de elementos contiguos se acoplan de manera que los valores de las incógnitas en sus nodos sean equivalentes. Así la solución total será continua.

De esta manera se expresa el sistema completo en forma matricial, donde la matriz de rigidez $[k]$ es la matriz de propiedades ensamblada y los vectores $\{u\}$ y $\{F\}$ contienen las incógnitas y las acciones sobre los elementos individuales ya ensambladas.

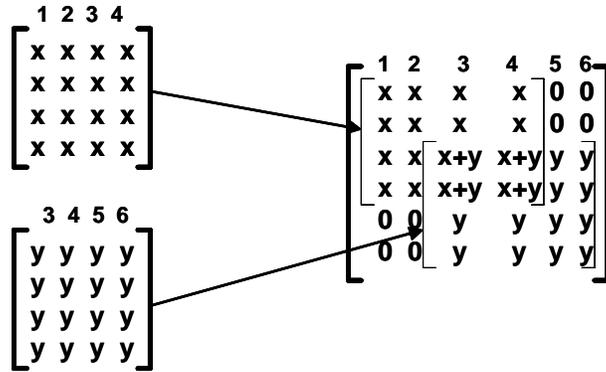


Figura 49 Esquema de ensamblaje de las matrices

Antes de resolver el sistema de ecuaciones ensamblado, debe modificarse para considerar las condiciones de frontera del sistema:

$$[k]\{u\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & \\ k_{21} & k_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ \\ \end{Bmatrix}$$

The matrix equation is shown with a yellow highlight on the bottom-right portion of the matrix and the corresponding zero values in the displacement vector.

Figura 50 Modificación de las matrices dependiendo de las condiciones de frontera

El sistema se soluciona con las técnicas de solución de sistemas de ecuaciones, tal como LU entre otros. Si se organizan los elementos de manera que la matriz de rigidez sea bandeada, se pueden utilizar esquemas eficientes de solución.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

The matrix equation is shown with a red dashed line indicating the banded structure of the stiffness matrix.

Figura 51 Esquema de solución matricial

6 Modelos de fenómenos físicos: Método de Elementos Finitos

A continuación se presentan algunos modelos de fenómenos físicos resueltos con el programa de elementos finitos ANSYS. La implementación de los problemas son seguidos paso a paso:

6.1 Análisis Estructural (Análisis de una torre de transmisión eléctrica)

Problema Físico:

Una torre de transmisión eléctrica es un ejemplo de estructura hecha con elementos tipo cercha (solo experimentan fuerzas axiales). Estas torres en realidad son estructuras en 3 dimensiones, pero simplicidad de este primer ejercicio, se hará el análisis de una de las secciones de la torre. Sobre este tipo de estructura varias fuerzas, como su peso propio, peso de los cables y fuerza de viento entre otros. En este caso consideraremos la fuerza que ejercen los cables sobre la torre.

Generalidades:

Unidades: Utilice unidades **S.I.**

Geometría: Las secciones transversales de cada uno de los miembros son de $6.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

Material: Asuma que la estructura está hecha de acero con el módulo de la elasticidad $E=200 \text{ GPa}$.

Condiciones de límite: La torre se restringe en las direcciones X y Y en la esquina izquierda inferior, y en dirección Y en la esquina derecha inferior.

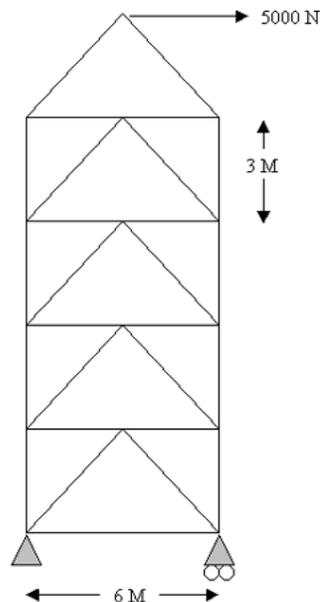
Cargas: La torre se carga en la parte superior. La carga está en la dirección horizontal solamente, y su magnitud es 5000 N .

Objetivo:

- Determinar la deflexión en cada unión.
- Determinar la tensión en cada miembro.
- Determinar la reacción en la base.

Esquema:

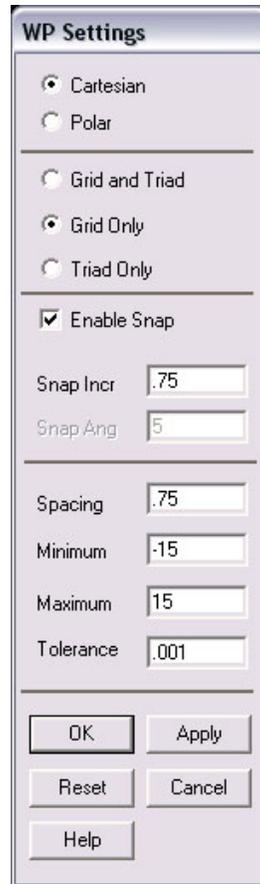
Los elementos verticales son de 3 m de longitud.



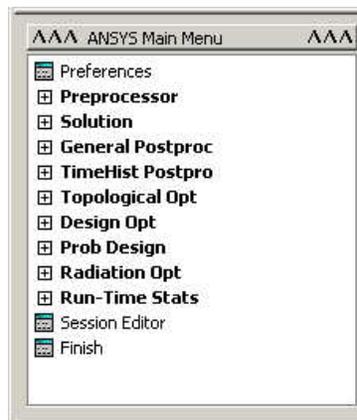
Modelar la estructura:

Vaya al menú para uso general de ANSYS

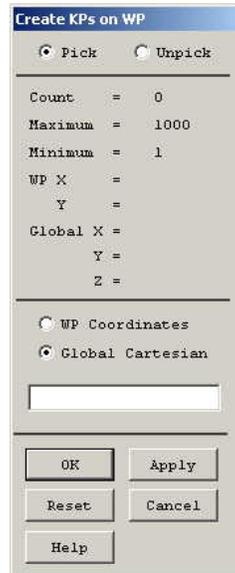
- Haga clic en **Workplane>WP Settings**
- Aparecerá la siguiente ventana



- Seleccione los botones Cartesian y Grid Only
- Introduzca los valores mostrados en la figura
- Vaya al ANSYS Main Menu

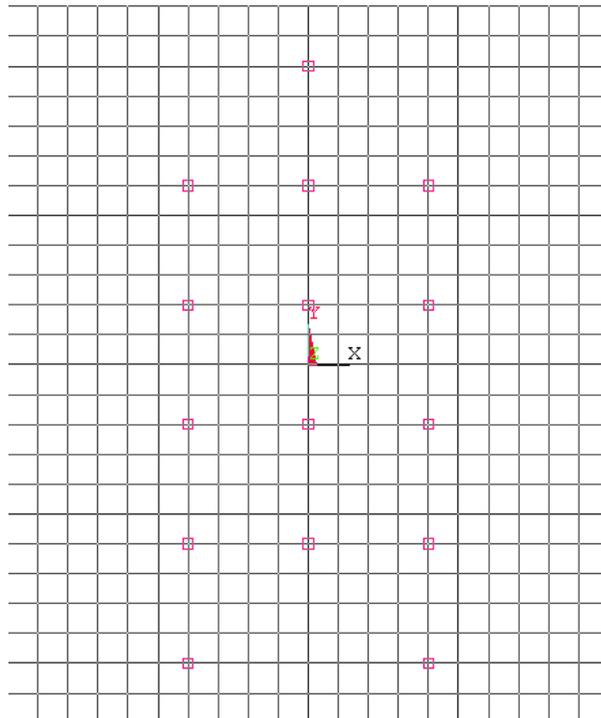


- Haga clic Preprocessor>-Modeling->Create>Keypoints>On Working Plane
- Aparecerá la siguiente ventana

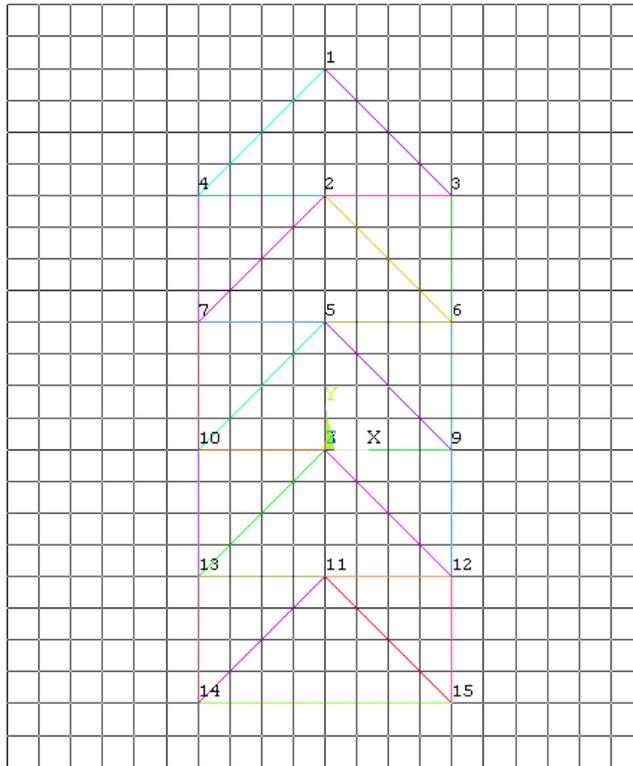


Ahora dibujamos los vértices que definen la geometría de la estructura.

- Seleccione los keypoints en la rejilla del workplane.
- Si usted no puede ver el workplane completo entonces vaya a **Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate** y haga ZommOut ver el workplane entero.

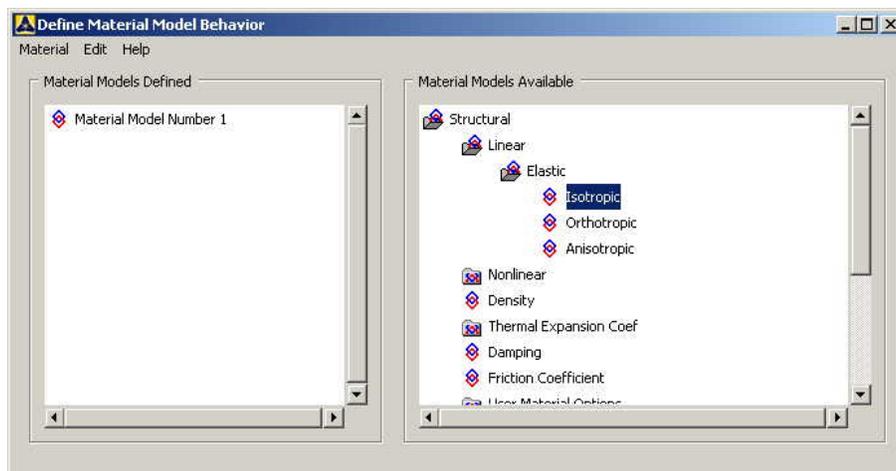


- Ahora creamos las líneas que conectan los keypoints
 - Haga clic en **Preprocessor>-Modeling->Create>-Lines->Lines>Straight Line**
 - Cree las líneas uniendo los keypoints para hacer la siguiente figura

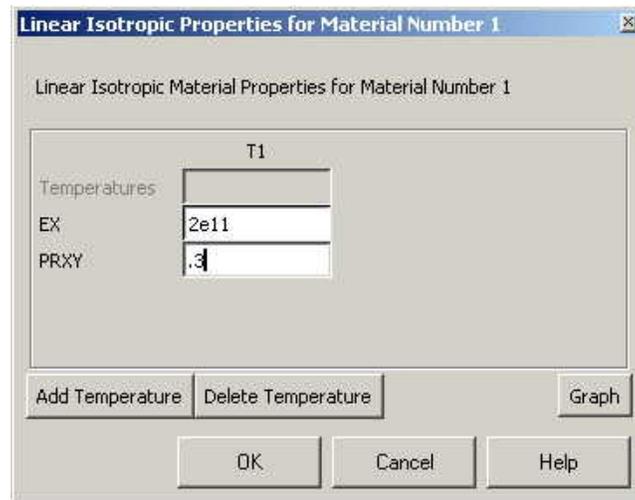


Propiedades de los materiales

- Vaya al ANSYS Main Menu
- Haga clic en **processor>Material Props>Material Models**
- En la ventana que aparece, elija **Structural>Linear>Elastic>Isotropic**



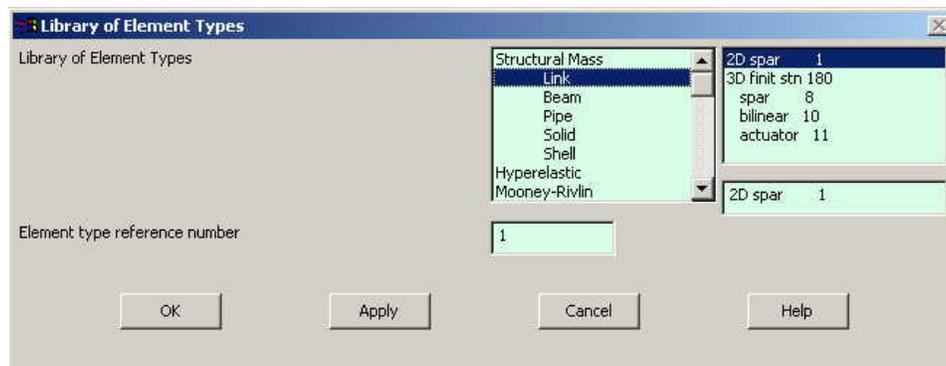
- Introduzca **1** para Material Property Number y haga clic en OK. La siguiente ventana aparecerá



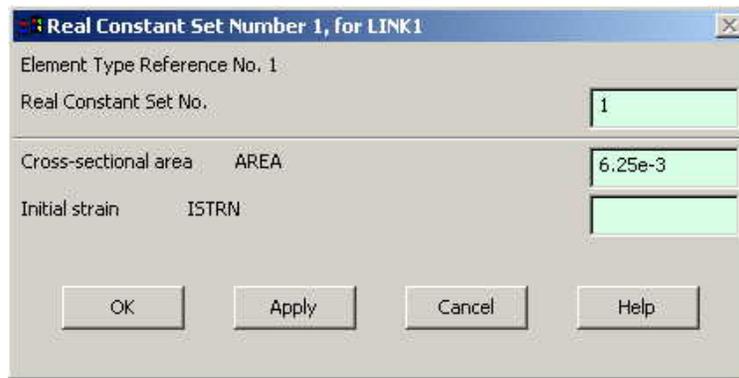
- Introduzca **2e11** para el módulo de Young y **0.3** para el coeficiente de Poisson. Haga clic en OK.

Propiedades de los elementos

- Seleccionar el tipo de elemento
 - Haga clic en **Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete...**
 - En la ventana 'Element Types' que se abre Haga clic en ADD... La ventana siguiente se abre.



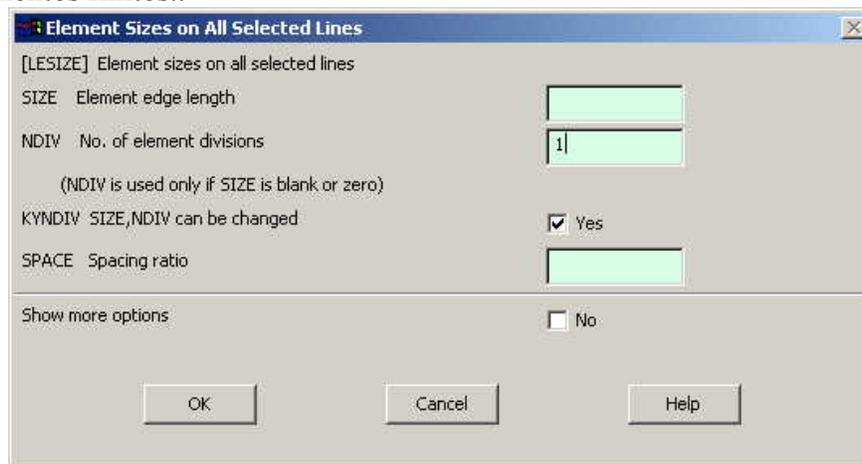
- Haga clic en Structural Link y seleccione 2D Spar. Haga clic en OK. Cierre la ventana 'Element Types'
- Ahora necesitamos definir el área transversal para este elemento.
- Vaya a **Preprocessor>Real Constants**
- En el cuadro de diálogo que aparece, haga clic en ADD
- En el próximo cuadro de diálogo, haga clic en OK y aparece la siguiente ventana



- Introduzca **6.25e-3** para el área y haga clic en OK

Enmallado:

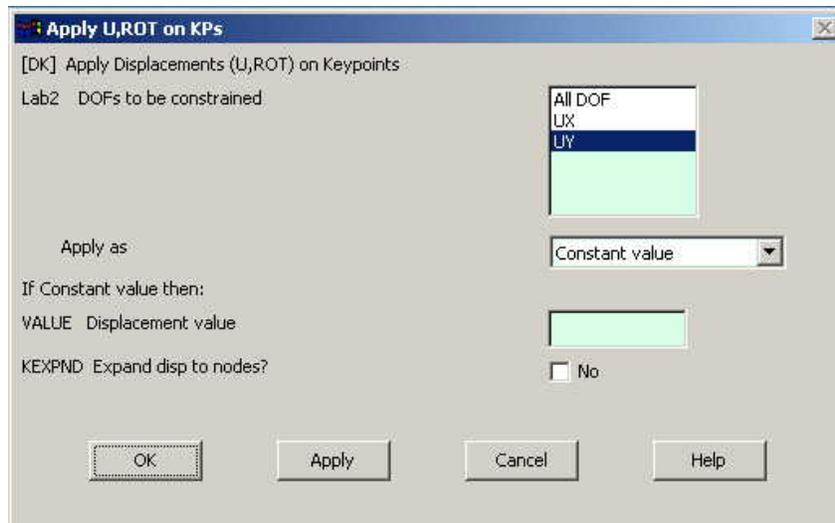
- Vaya a **Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Lines>All Lines**
- En el menú que aparece, introduzca **1** en el campo 'Number of element divisions' esto convierte cada miembro de la estructura en un elemento del modelo de elementos finitos..



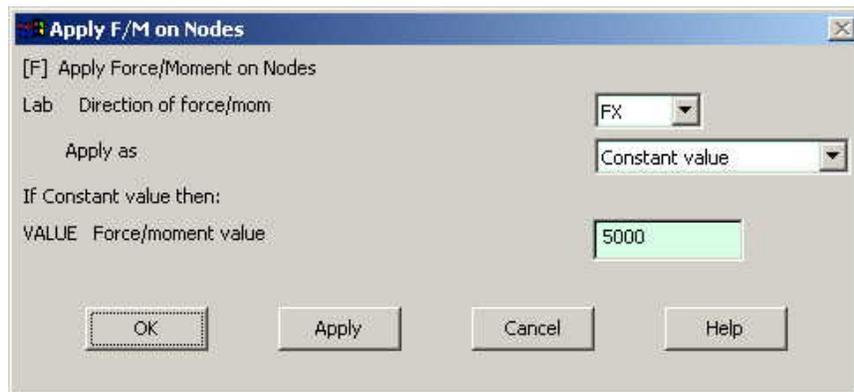
- Haga clic en OK
- Ahora vaya a **Preprocessor>-Meshing->Mesh>lines**
- Seleccione todas las líneas y haga clic en OK en el cuadro de diálogo

Condiciones de borde y restricciones:

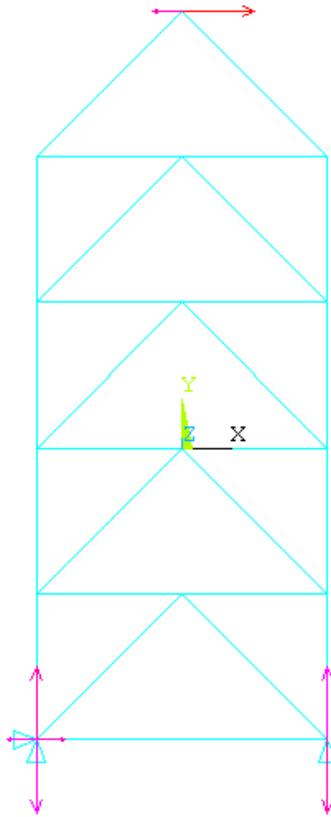
- Aplicación de las restricciones
 - Vaya al Main Menu. Haga clic en **Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply>Structural>Displacement>On Keypoints**
 - Seleccione el keypoint en el cual va a aplicar la restricción. Aparecerá la siguiente ventana



- Seleccione UX y UY para el keypoint de la esquina izquierda inferior y UY para el keypoint de la esquina inferior derecha haga clic en OK. El valor del desplazamiento se restringe a cero.
- Aplicación de las fuerzas
 - Vaya al Main Menu.
 - Haga clic en **Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural > Forces/Moment > On Nodes**
 - Seleccione el nodo superior.
 - Haga clic en el cuadro de diálogo de selección y aparecerá la siguiente ventana



- Seleccione FX e introduzca 5000 como el valor de Force/Moment.
- Haga clic en OK
- Aparecerá la siguiente figura

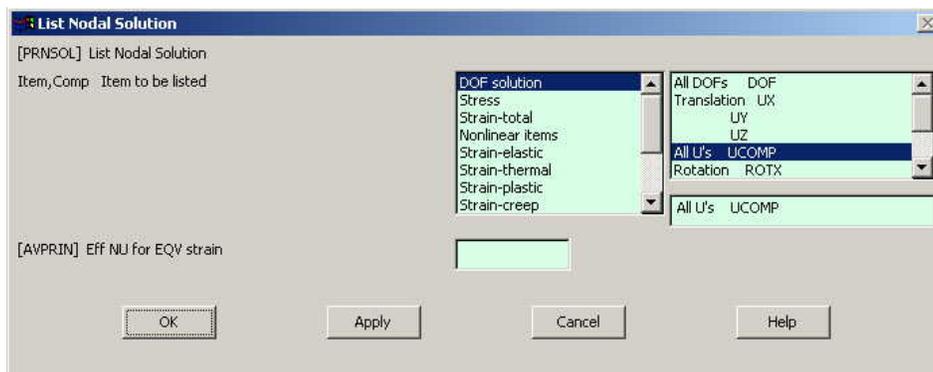


Solución:

- Vaya a Main Menu>Solution>-Analysis Type->New Analysis
- Seleccione Static y Haga clic en OK.
- Vaya a Solution>-Solve->Current LS

Post-Proceso:

- Vaya al Main Menu de ANSYS.
- Haga clic en General Postproc>List Results>Nodal Solution. La siguiente ventana aparecerá



- Seleccione DOF solution y All U's. Haga clic en OK, la lista de los desplazamientos nodales aparecerá

```

PRNSOL Command
File
PRINT U   NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP= 1   SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000   LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

```

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.29485E-03	0.20329E-19	0.0000	0.29485E-03
2	0.21788E-03	0.60000E-04	0.0000	0.22599E-03
3	0.21788E-03	-0.60000E-04	0.0000	0.22599E-03
4	0.21188E-03	-0.27105E-19	0.0000	0.21188E-03
5	0.14091E-03	0.54000E-04	0.0000	0.15090E-03
6	0.14091E-03	-0.54000E-04	0.0000	0.15090E-03
7	0.13491E-03	-0.10164E-19	0.0000	0.13491E-03
8	0.75941E-04	0.42000E-04	0.0000	0.86782E-04
9	0.75941E-04	-0.42000E-04	0.0000	0.86782E-04
10	0.69941E-04	-0.27915E-20	0.0000	0.69941E-04
11	0.28971E-04	0.24000E-04	0.0000	0.37620E-04
12	0.28971E-04	-0.24000E-04	0.0000	0.37620E-04
13	0.22971E-04	-0.60000E-05	0.0000	0.23741E-04
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

- Se pueden enumerar las tensiones para cada elemento seleccionando Gen Postprocessing > List Results>Element Solution
- Ahora seleccione LineElem Results. La tabla siguiente será enumerada.

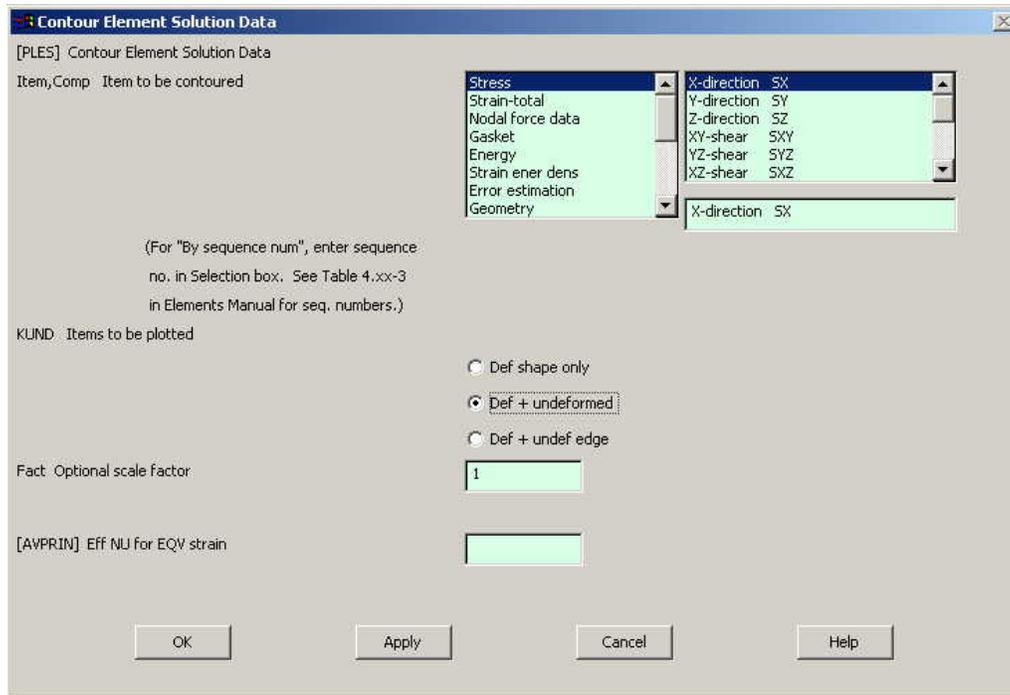
```

PRESOL Command
File
PRINT ELEM ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT
***** POST1 ELEMENT SOLUTION LISTING *****
LOAD STEP 1   SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000   LOAD CASE= 0
EL= 1   NODES= 1   2   MAT= 1
LINK1
TEMP = 0.00   0.00   FLUENCES = 0.000E+00 0.000E+00
MFORX = 3535.5
SAXL= 0.56569E+06   EPELAXL= 0.000003   EPTHAXL= 0.000000   EPSWAXL= 0.000000   EPINAXL= 0.000000
EL= 2   NODES= 1   3   MAT= 1
LINK1
TEMP = 0.00   0.00   FLUENCES = 0.000E+00 0.000E+00
MFORX = -3535.5
SAXL=-0.56569E+06   EPELAXL=-0.000003   EPTHAXL= 0.000000   EPSWAXL= 0.000000   EPINAXL= 0.000000
EL= 3   NODES= 2   4   MAT= 1
LINK1
TEMP = 0.00   0.00   FLUENCES = 0.000E+00 0.000E+00
MFORX = -2500.0
SAXL=-0.40000E+06   EPELAXL=-0.000002   EPTHAXL= 0.000000   EPSWAXL= 0.000000   EPINAXL= 0.000000

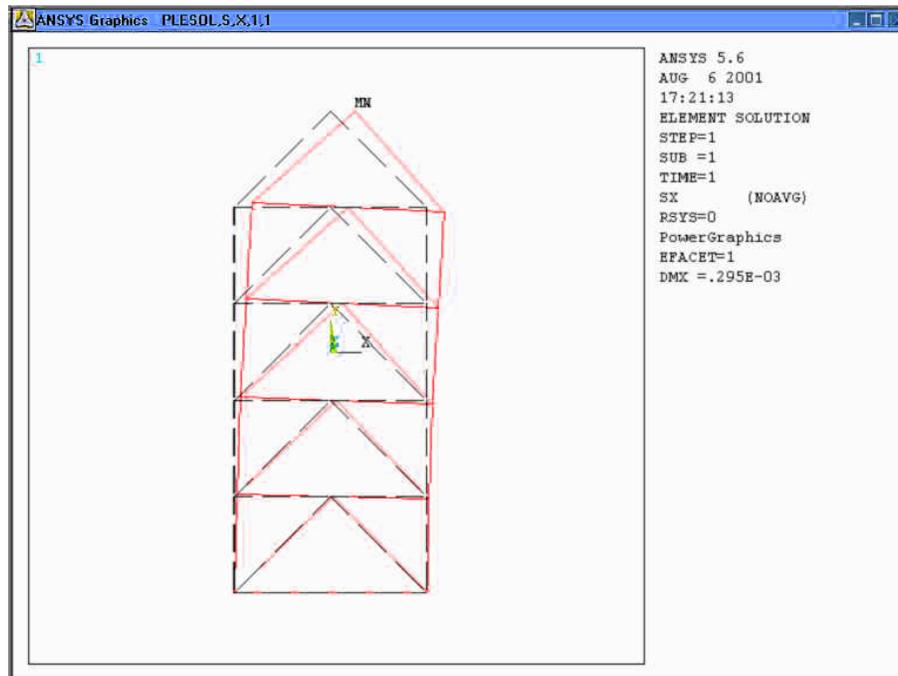
```

Desplazamientos:

- Vaya General Postproc>Plot Results>-Contour Plot->Element Solution. Aparecerá la siguiente ventana.



- Seleccione la tensión para deseada y la siguiente figura aparecerá



6.2 Análisis Térmico (Análisis de una pared de aislamiento térmico)

En este ejemplo usted determinará el flujo del calor a través de la pared modular compuesta mostrada en la figura.

Problema Físico:

Una pared compuesta se utiliza en lugares fríos para aislar edificios de los alrededores exteriores fríos. Consiste en colocar un material aislante dentro de una pared. El material aislador está generalmente en dos capas y se escalona. En este problema modelaremos una sección de tal pared y determinaremos el flujo del calor a través de la pared. Esto da una estimación de la cantidad de calor que se necesita para mantener la temperatura ambiente.

Descripción Del Problema:

- El material externo de la pared compuesta es de acero con una conductividad térmica de 20 W/m K
- El material aislador tiene una conductividad térmica de 0,1 W/m K.
- Unidades : Utilice las unidades de S.I.
- Geometría : Vea la figura.

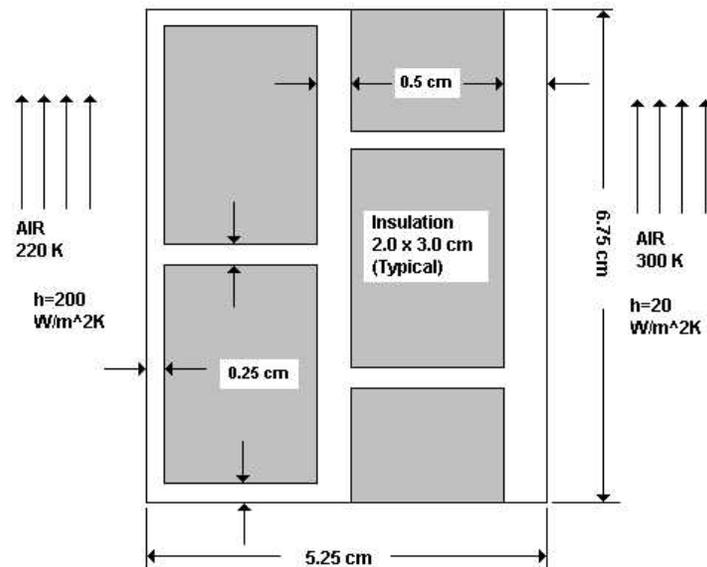
Condiciones de Frontera:

- La temperatura a la izquierda de la pared es 220K, y el coeficiente filmico es 200 W/m²K. En el derecho la temperatura es 300K, y el coeficiente filmico es 20 W/m²K.

Objetivo:

- Determinar el flujo de calor a través de la pared.
- Trazar la distribución de la temperatura.
- Generar el diagrama vectorial del flujo de calor.

Figura:



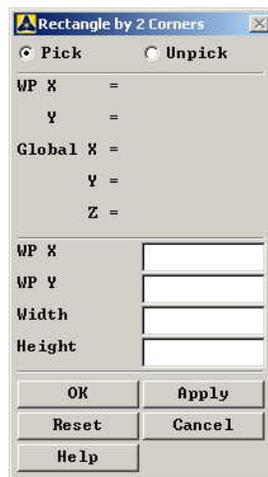
Modelo:

- Vaya al menú para uso general de ANSYS.
 - Haga clic en **Workplane>WP Settings**.

- La siguiente ventana aparecerá

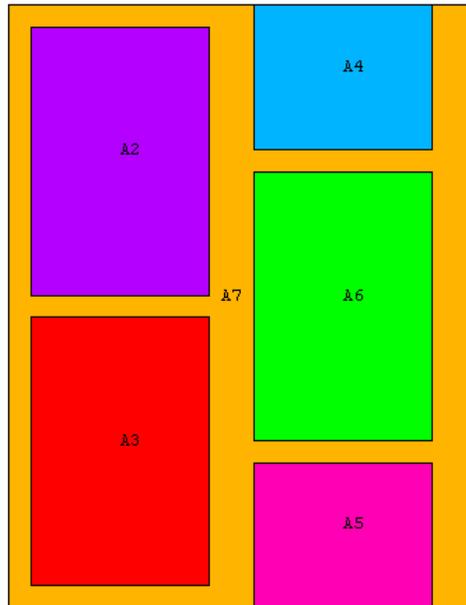


- Seleccione los botones Cartesian y Grid Only
- Introduzca los valores mostrados en la figura
- Vaya al ANSYS Main Menu
- Haga clic en **Preprocessor >Modeling >Create >Area >Rectangle >By 2 Corners**
- La siguiente ventana aparecerá:



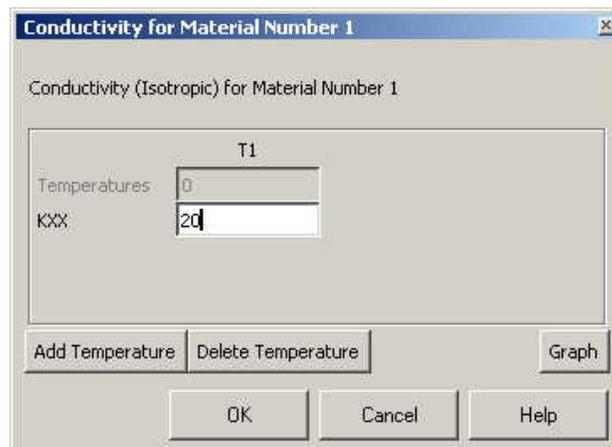
- Ahora generamos los rectángulos a partir de las coordenadas de sus esquinas.

- El rectángulo externo tiene las dimensiones 5,25 centímetro X 6,75 centímetros, es decir 42 unidades por 54 unidades en la rejilla.
- Haga lo mismo con los otros rectángulos.
- Haga clic en **Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Overlap>Areas**. Primero seleccione el área exterior y luego las áreas interiores.



Propiedades de los materiales:

- Necesitamos definir las propiedades de los materiales por separado para el acero, y el material del aislamiento.
- Vaya al Main Menu y haga clic en **Preprocessor>Material Props>Material Models**. En la ventana aparece, elija **Thermal>Conductivity>Isotropic**
- La siguiente ventana aparecerá

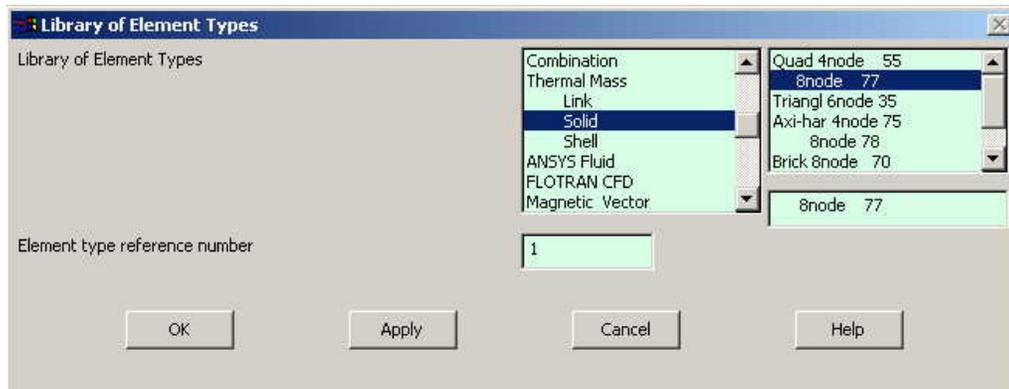


- Introduzca 20 para la conductividad termal. Haga clic en OK.

- Esto representa las características materiales para el acero.
- Haga clic **Material>New Model** para definir las propiedades para el material 2.
- Repita los pasos para crear las propiedades para el aislamiento ($k=0.1$ W/m K).

Propiedades del elemento

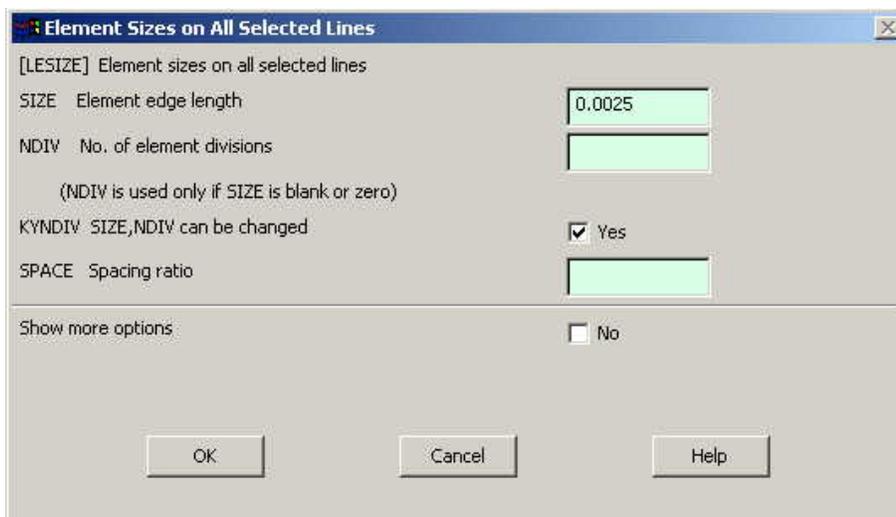
- Haga clic en **Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete...** En la ventana que aparece
- Haga clic en ADD
- La siguiente ventana aparece



- Haga clic en Thermal Solid y seleccione Quad 8node 77.
- Haga clic en OK

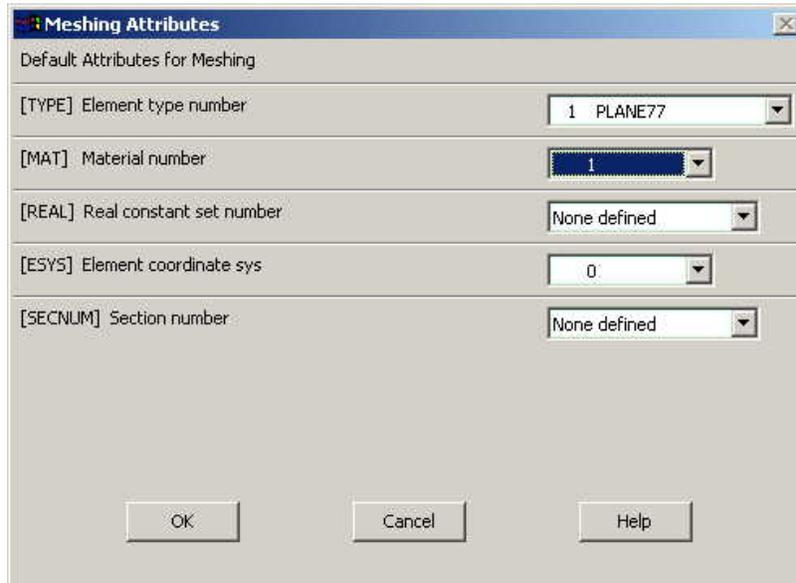
Enmallado:

- Vaya a **Preprocessor>Meshing>Size Controls>Manual Size>Lines>All Lines.**
- En la ventana que aparece, introduzca 0.0025 en el campo 'Element edge length'

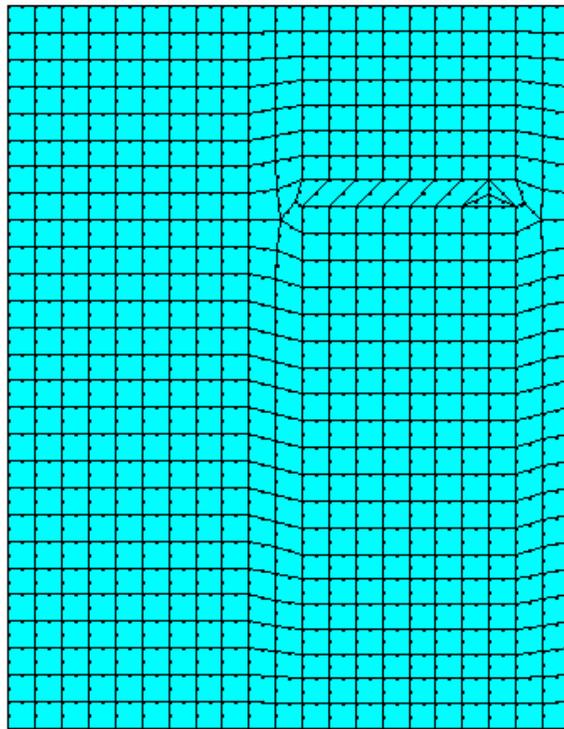


- Primero enmallamos el área de acero.

- Vaya a **Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Default Attributes**. Cerciórese que la ventana “material number” indique **1**.



- Ahora vaya a **Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas > Free**.
- Escoja el área de acero y haga clic en OK.
- Repita el mismo proceso para las áreas del aislamiento. Cerciórese que el número material es el número 2.
- La siguiente figura aparecerá:



Condiciones de borde y restricciones:

- Vaya a **Preprocessor>Loads>Define Loads>Apply>Thermal>Convection>On Lines**.
- Escoja la línea izquierda a lo largo del límite externo. Haga clic en OK. La siguiente ventana aparecerá.

Apply CONV on lines

[SFL] Apply Film Coef on lines Constant value

If Constant value then:
VALI Film coefficient 200

[SFL] Apply Bulk Temp on lines Constant value

If Constant value then:
VAL2I Bulk temperature 220

If Constant value then:
Optional CONV values at end J of line
(leave blank for uniform CONV)
VALJ Film coefficient
VAL2J Bulk temperature

OK Apply Cancel Help

- Introduzca 200 para "Film Coefficient" y 220 para "Bulk Temperature". Haga clic en OK.
- Repita para la línea derecha. (VALI = 20 , VAL2I = 300)

Solución:

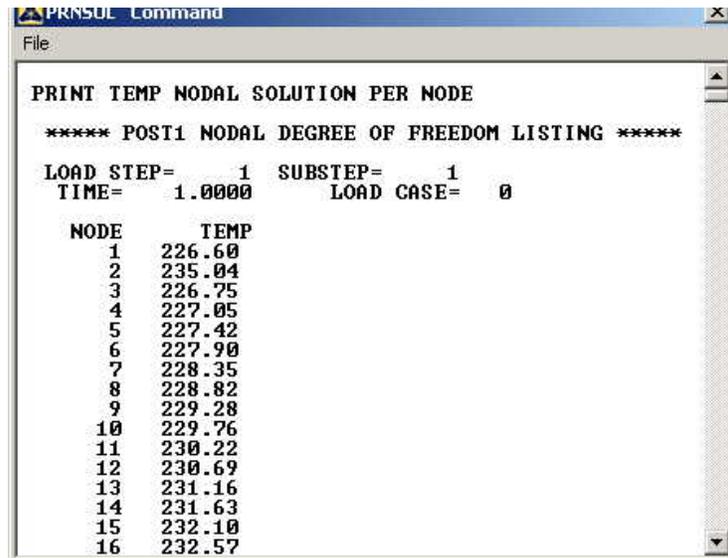
- Vaya a **Main Menu>Solution>Analysis Type>New Analysis**
- Seleccione **Steady State** y haga clic en OK.
- Vaya a **Solution>Solution>Solve>Current LS**
- Una ventana de "Warning" puede aparecer. Haga clic en OK e ignórela.

Post-Proceso:

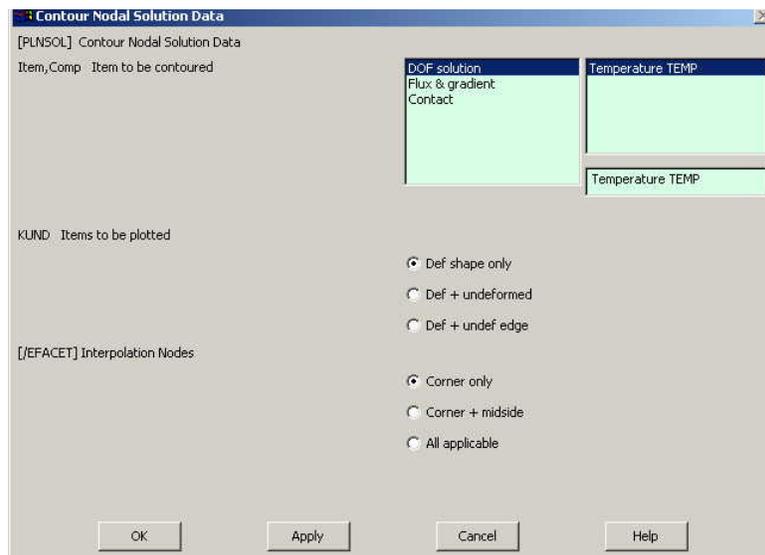
- Haga clic en **General Postprocessing>List Results>Nodal Solution**
- La siguiente ventana aparecerá



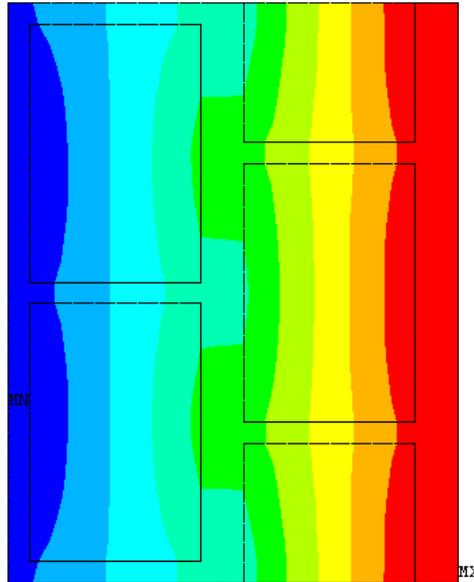
- Seleccione **DOF solution** y **Temperature**. Haga clic en **OK**



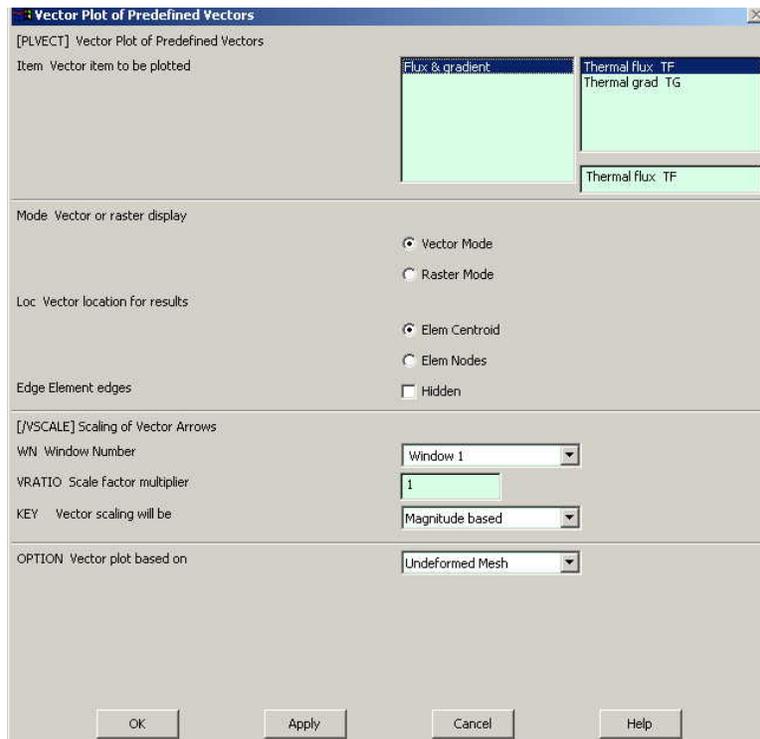
- Usted puede también trazar la distribución de la temperatura para este caso.
- Vaya a **General Postprocessing>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solution**.
- La siguiente ventana aparecerá



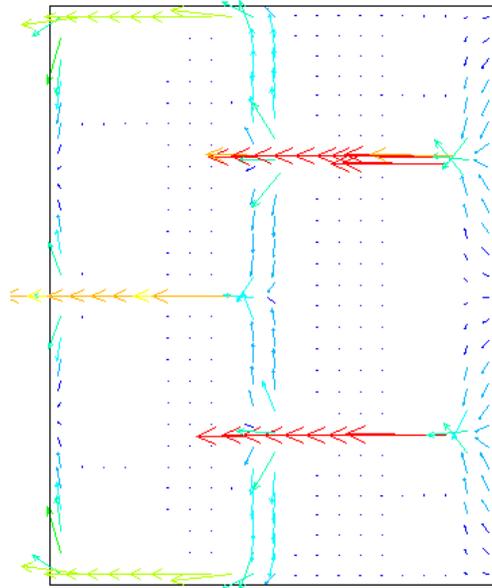
- Seleccione DOF solution y Temperatura TEMP.
- La siguiente ventana aparecerá:



- Para el diagrama vectorial vaya **Main Menu > General Postprocessing > Plot Results > Vector Plot > Predefined.**
- La siguiente ventana aparecerá:



- Seleccione **Flux & Gradient** y **Thermal flux**.
- Haga clic en OK
- El siguiente diagrama aparecerá

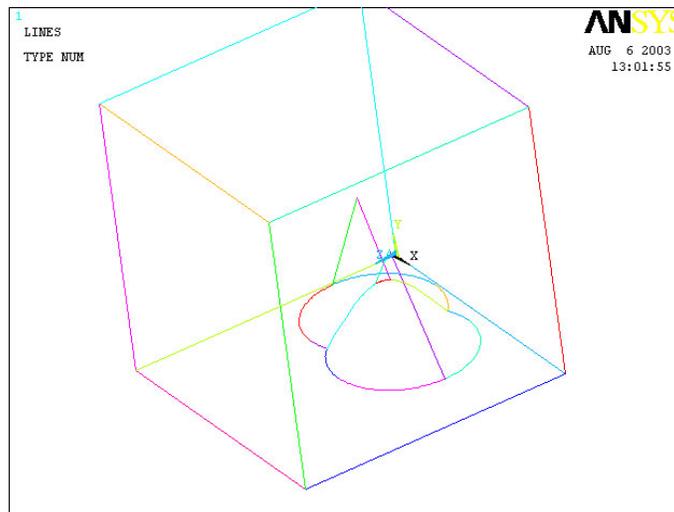


6.3 Análisis de Flujo (Flujo de aire a través de sistema montañoso)

Descripción Del Problema:

- El aire viaja con una velocidad dada sobre las montañas rocosas en Denver Colorado.
- Consecuentemente, este flujo altera la presión alrededor de la ciudad ubicada en la cima de la montaña. Esta distribución de la presión determina los patrones del tiempo alrededor de la ciudad. El objetivo de este problema es mostrar esa distribución.

Figura:



Nota: (todo es disminuido por un factor de 1000 para escalar el problema)

- El cubo del aire sobre las montañas es de 10mX10mX10m.
- Las montañas se colocan como conos con las siguientes dimensiones y cuyo centro se encuentra en los siguiente puntos:

Montaña 1

Punto = (2.5,2.5)

rad1 = 2,4

rad2 = 0

profundidad: -4,346

Montaña 2

Punto = (5.0,3.0)

rad1 = 2,5

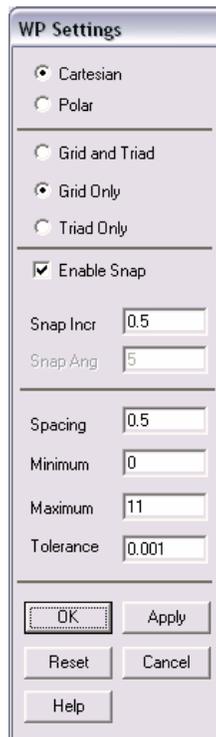
rad2 = 0

profundidad: -3,7

- El viento que viaja sobre las montañas va a 0,013 m/s. (aproximadamente 30mph a escala real)

Modelo:

- Vaya al menú para uso general de ANSYS
- Haga clic en **Workplane>WP Settings**
- Aparecerá la siguiente ventana



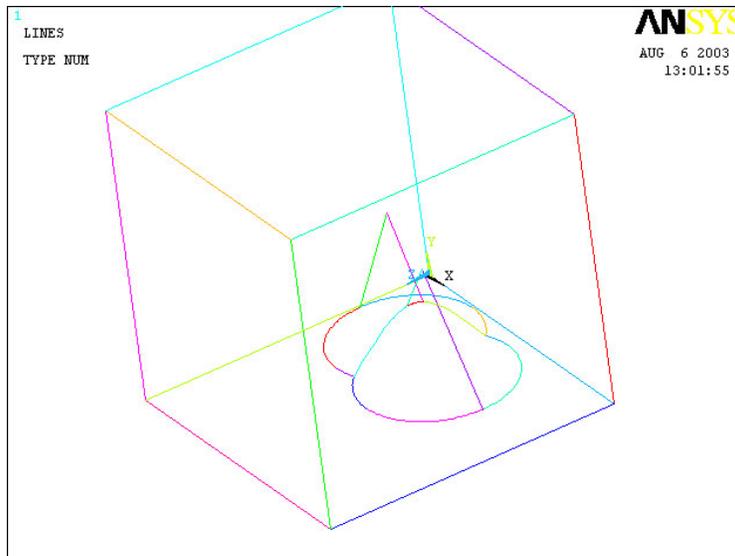
- Seleccione **Cartesian y Grid Only**
- Introduzca los valores mostrados en la figura arriba.

En este problema modelaremos el contorno de la montaña, para modelar el viento alrededor de él, restamos el volumen de las montañas del bloque del aire. Después aplicaremos el flujo del aire sobre las montañas y veremos cómo su es impedido debido a la forma de las "montañas rocosas."

- Haga clic en **Preprocessor>-Modeling->** y cree el volumen para definir el aire alrededor de las montañas.

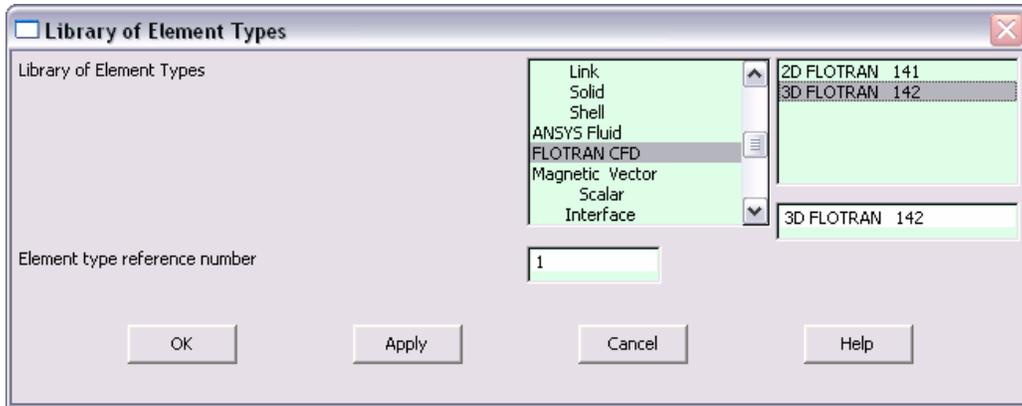
NOTA : Vaya al menú para uso general de ANSYS, seleccione **PlotCtrls>Pan Zoom Rotate** y a su vez seleccione **Isometric view**, esto dará una mejor perspectiva del modelo.

- Genere el volumen del cubo de aire y los conos para luego hacer una operación booleana y llevar a cabo una substracción de los volúmenes de los conos. De esta manera se genera el volumen real del aire, y el controno de las montañas estará delimitado por el borde inferior del modelo.



Propiedades de los elementos:

- Haga clic en **Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete...** En la ventana que aparece
- Haga clic en **ADD**
- La siguiente ventana aparece



- Haga clic en **Flotran CFD** y **3D Flotran 142** .
- Haga clic en **OK**
- Cierre la ventana

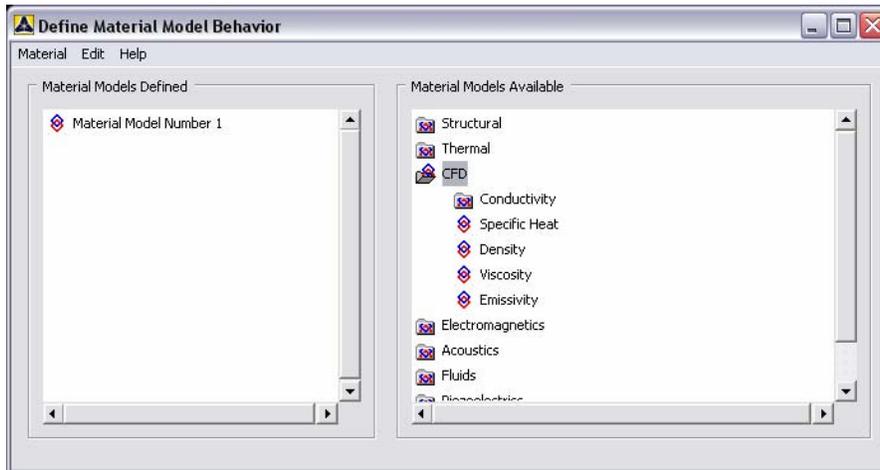
Propiedades del flujo:

- Vaya a **Preprocessor>Flotran Set Up>Fluid Properties**
- Cerciórese de que los primeros dos campos sean **AIR-SI**, y después haga clic en **OK**. Otra ventana aparecerá, de clic en **OK** nuevamente.

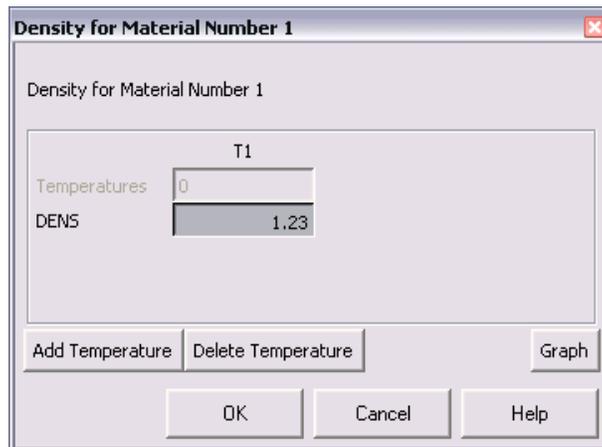


Propiedades de los materiales

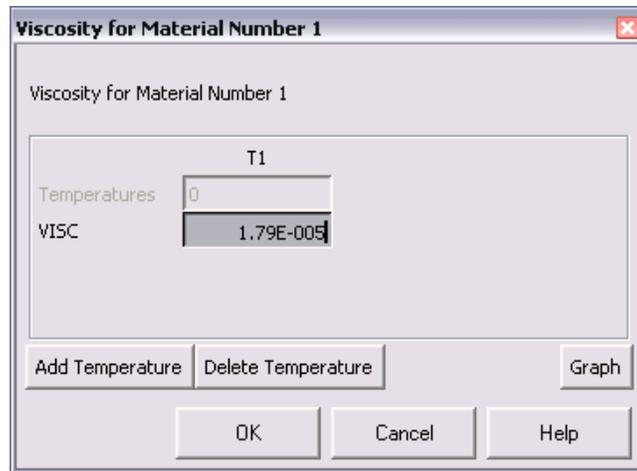
- Vaya al Main Menu de ANSYS
- Tecleo **Preprocessor>Material Props>Material Models**. La ventana siguiente aparecerá



- Seleccione **CFD>Density** . La ventana siguiente aparece.



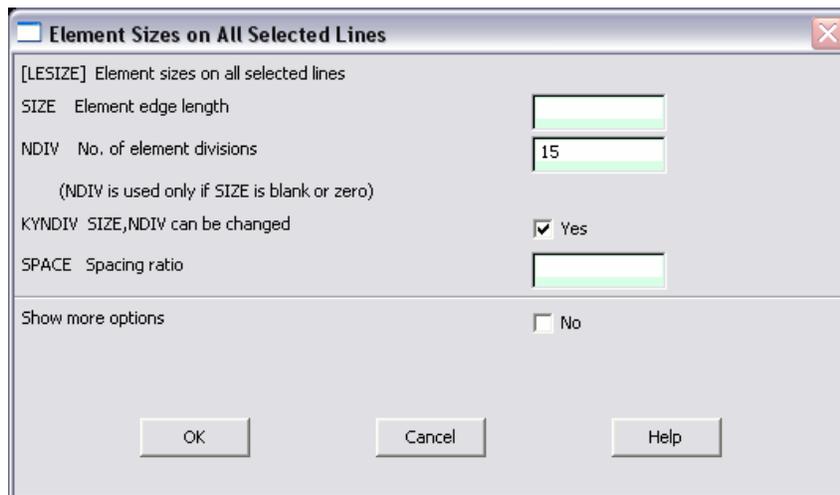
- Introduzca **1.23** para la densidad del aire. Haga clic en **OK**.
- Ahora seleccione **CFD>Viscosity**. La ventana siguiente aparece:



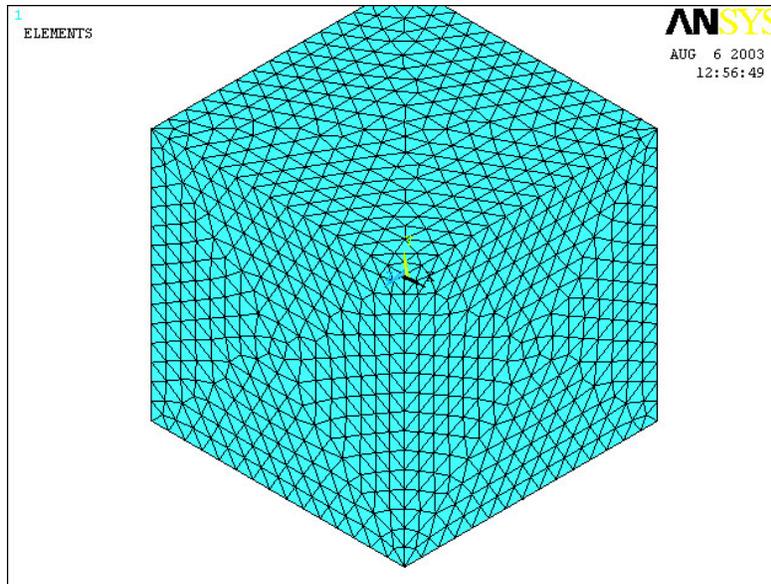
- Introduzca **1.79e-5** para la viscosidad del aire. Haga clic en **OK**

Enmallado:

- Vaya a **Preprocessor>Meshing>Size Cntrls>ManualSize>Lines>All lines**
- Introduzca **15** en el campo 'No. of element divisions'

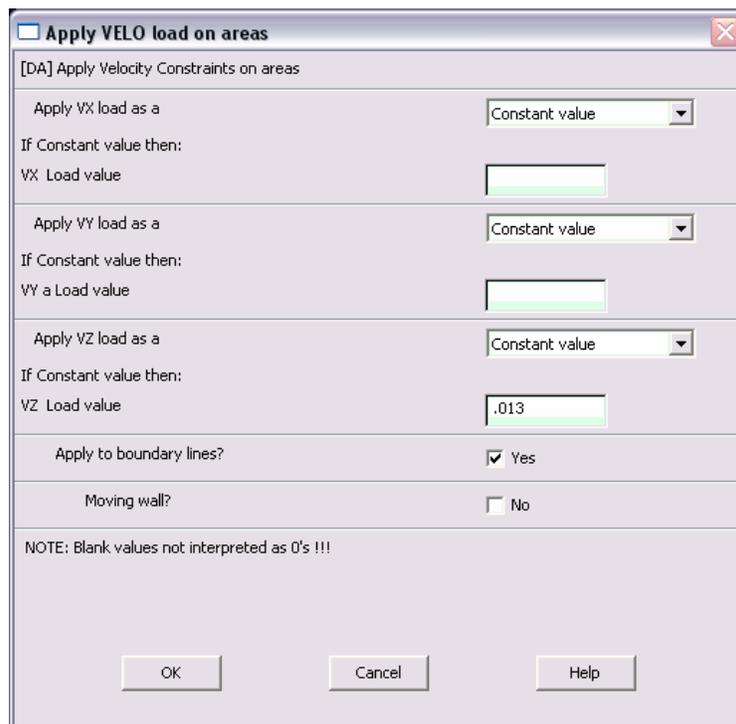


- Ahora vaya a **Preprocessor>Meshing>Mesh>Areas>Free**. Seleccione **Pick All**. Aparecerá la siguiente figura:



Condiciones de borde y restricciones

- Vaya a **Preprocessor>Loads>Define Loads>Apply>Fluid CFD>Velocity>On Areas**.
- Escoja la cara del cubo que el plano XY forma con el origen haga clic en OK.
- La siguiente ventana aparecerá.



- Introduzca **0,013** en el campo VZ. El **0,013** corresponde a la velocidad de 13 metros por segundo del aire que fluye sobre las montañas reducido en 1000.
- Fije la velocidad igual a **CERO** a lo largo de todas las áreas que definen las montañas y el suelo. ($VX=VY=0$ para todos los lados)
- Vaya a **Main Menu>Preprocessor>Loads>Define Loads>Apply>Fluid CFD>Pressure DOF>On Areas..** Escoja las áreas sin las condiciones de límite previamente definidas (Por ejemplo: la tapa, los lados, y la cara enfrente de la cara con la velocidad aplicada) Haga clic en OK.
- Introduzca **0** como el valor de la presión. (esto fija la presión como presión atmosférica permitiendo que el aire pase sobre la montaña)

Solución

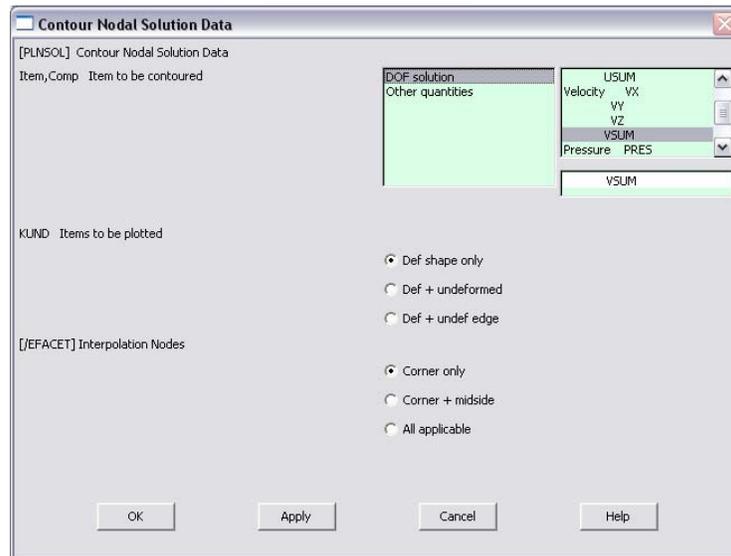
- Vaya a **Main Menu>Solution>Flotran Set Up>Execution Ctrl**
- La ventana siguiente aparece. Cambie el valor del primer campo a **10**.
- Haga clic en OK.

Field	Value
EXEC Global iterations	10
OVER .rfl file overwrite freq	0
APPE .rfl file append freq	0
[FLDATA3],TERM Termination Criteria	
VX Velocity component	0.01
VY Velocity component	0.01
VZ Velocity component	0.01
PRES Pressure	1e-008
TEMP Temperature	1e-008
ENKE Turbulent kinetic energy	0.01
ENDS Turbulent dissipation	0.01
Note: Termination check is ignored for a DOF if its termination criterion is negative	
[FLDATA5],OUTP Output Options	
SUMF Output summary frequency	10

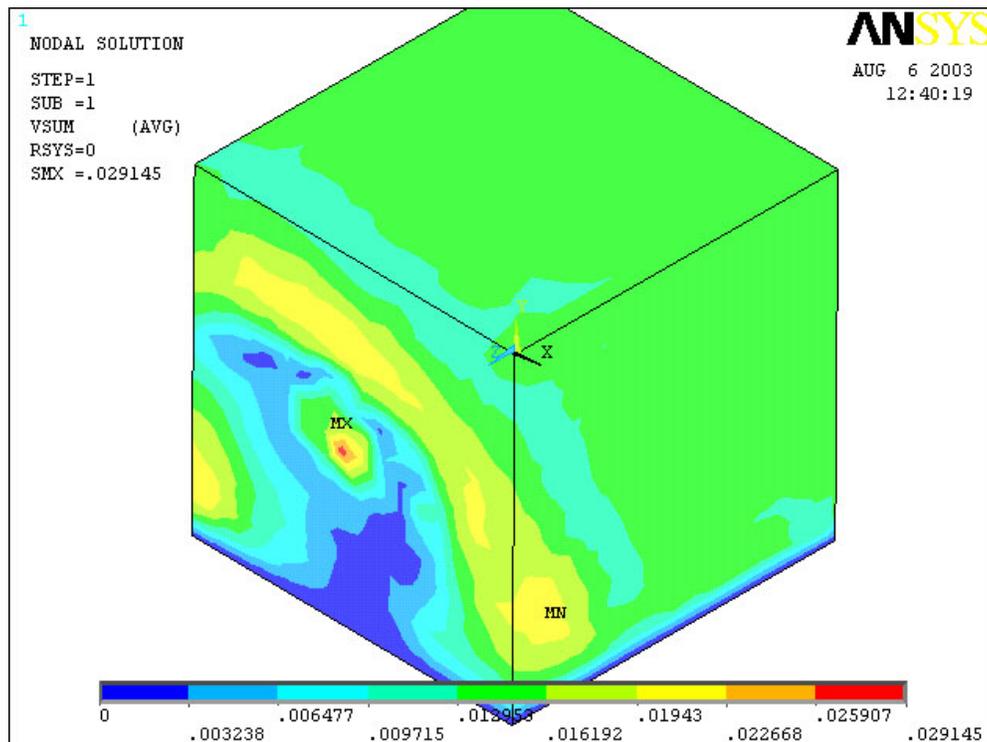
- Vaya a **Solution>Run FLOTRAN .**

Post-Proceso:

- Vaya a **General Postproc>Read Results>Last Set**
- Luego vaya a **General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solution.**
- La siguiente ventana aparece:

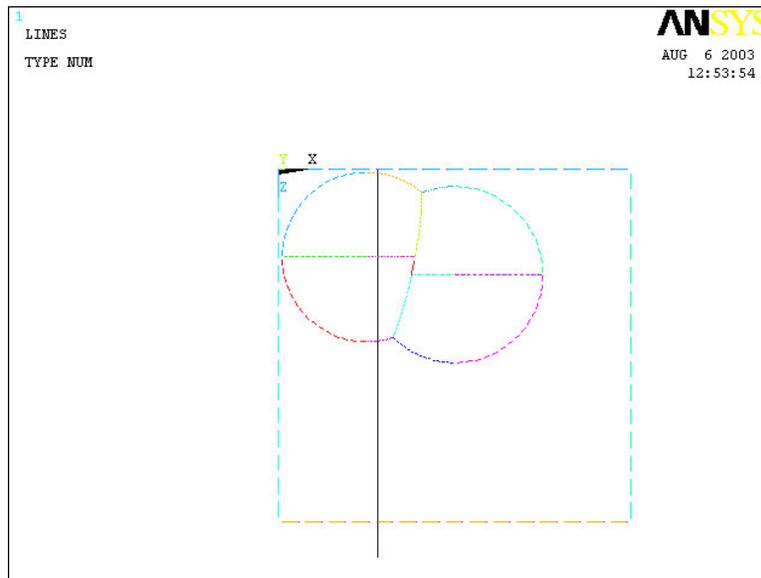


- Seleccione **DOF Solution** y **Velocity** y haga clic en OK
- La siguiente figura aparece



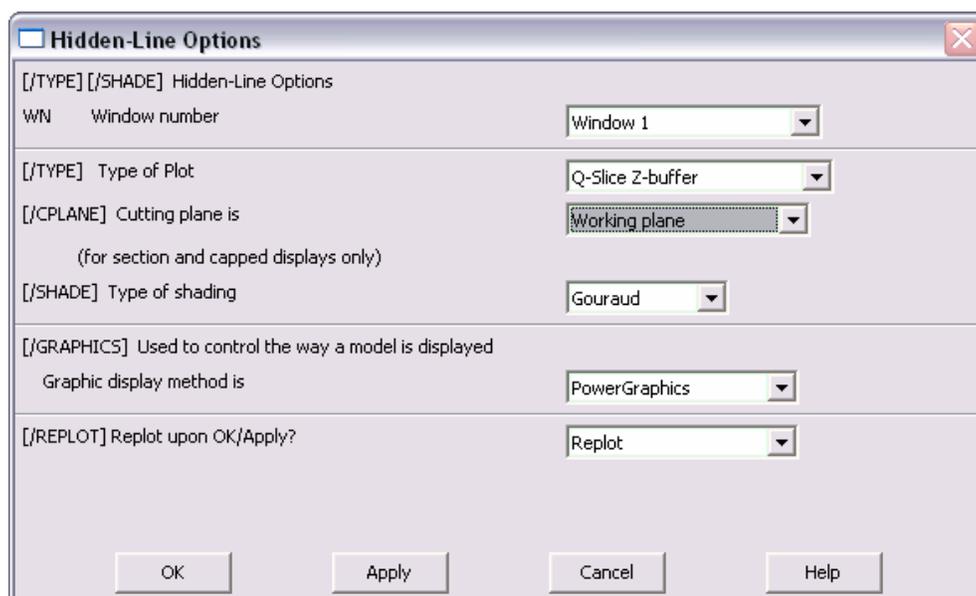
Nota: Es necesario hacer un plano de corte para poder ver el contorno de presión y los vectores de velocidad sobre las montañas.

- Primero, vaya **ANSYS Main Menu>WorkPlane** y seleccione **Display Working Plane**. Ahora que se selecciona el plano de trabajo, vaya a **ANSYS Main Menu>WorkPlane >Offset WP by Increments** y ajuste el plano de trabajo tales que interseca una sección de una de las montañas.

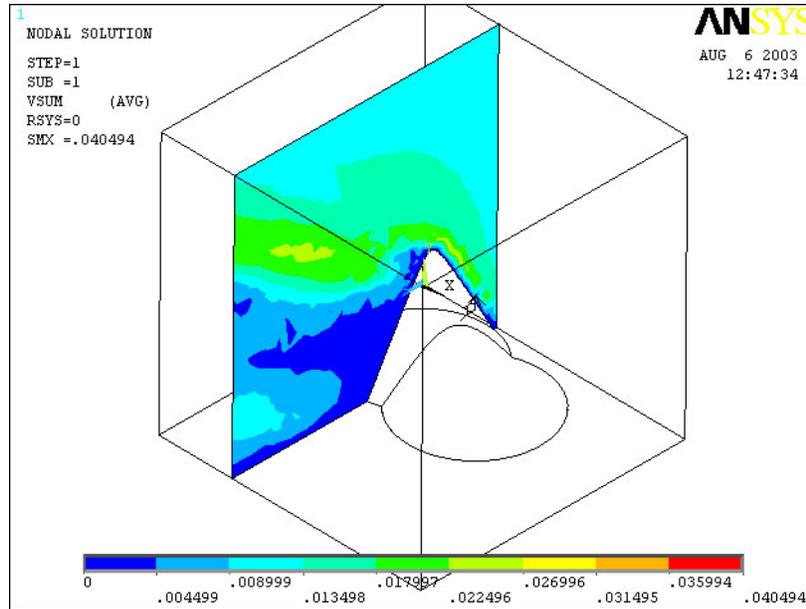


Nota: usted puede cerciorarse seleccionando **ANSYS Main Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate** y cambie los ángulos de visión.

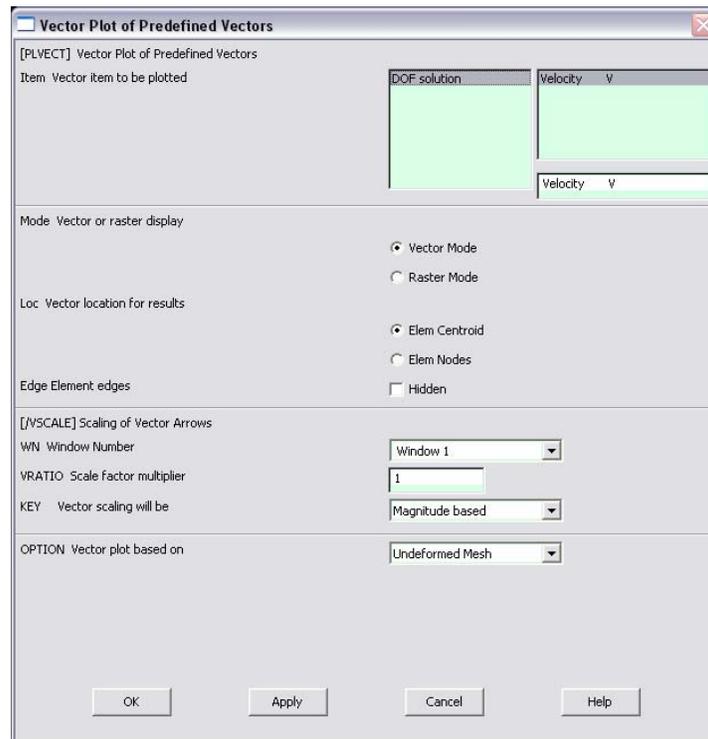
- Seleccione **ANSYS Main Menu>PlotCtrls>Style...>Hidden Line Options** una ventana aparecerá:



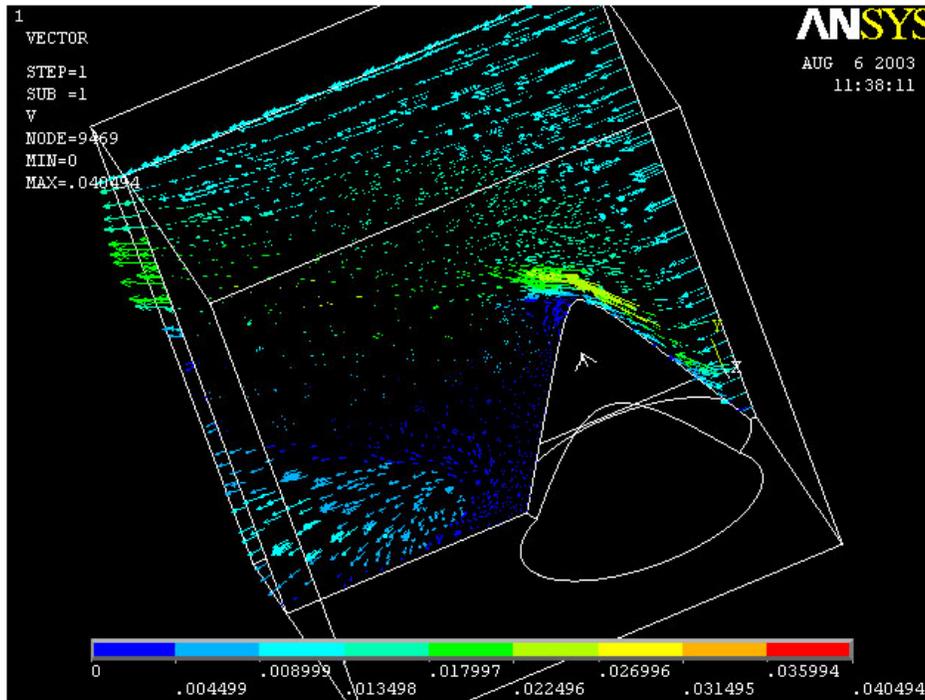
- En esta ventana cambie “Type of Plot” a Q-Slice Z-buffer” y “Cutting Plane is” a Working Plane.
- La siguiente figura aparece



- Después, vaya a **Main Menu>General Postproc>Plot Results>Vector Plot>Predefined.**
- La siguiente ventana aparecerá:



- Haga clic en OK.
- La siguiente ventana aparecerá



Observe la distribución de la velocidad como afecta la presión. Debido al flujo de aire, una zona de la presión baja se crea en el lado opuesto de la montaña. Si ocurriera esta situación realmente, esta zona de la presión baja influenciaría el tiempo y causaría un cierto efecto sobre la atmósfera alrededor de la ciudad de Denver.

7 Introducción a la estadística descriptiva y la probabilidad

7.1 Estadística descriptiva

7.1.1 Población y muestra

Algo importante que hay que mencionar es que no siempre se trabaja con todos los datos. Esto por diversas razones, que pueden ser desde prácticas hasta por economía. Por ejemplo, resultaría muy costoso obtener los datos de todos los seres humanos, o impráctico (y a la vez destructivo) obtener como datos el tiempo en el que se funden las bombillas producidas por una cierta marca realizando la medición de toda la producción. El estudio conduciría a la empresa a la ruina, pues la producción entera desaparecería.

Por esta razón se considera un subconjunto del total de los casos, sujetos u objetos que se estudian y que se les obtienen los datos. La población, entonces, es el total hipotético de los datos que se estudian o recopilan. Ante la imposibilidad ocasional de conseguir a la población, entonces se recurre a la muestra, que viene siendo un subconjunto de los datos de la población, pero tal subconjunto tiene que contener datos que pueden servir para posteriores generalizaciones de las conclusiones.

7.1.2 Representaciones gráficas

Gran parte de la utilidad que tiene la Estadística Descriptiva es la de proporcionar un medio para informar basado en los datos recopilados. La eficacia con que se pueda realizar tal proceso de información dependerá de la presentación de los datos, siendo la forma gráfica uno de los más rápidos y eficientes, aunque también uno de los que más pueden ser manipulados o ser malinterpretados si no se tienen algunas precauciones básicas al realizar las gráficas. Existen también varios tipos de gráficas, o representaciones gráficas, utilizándose cada uno de ellos de acuerdo al tipo de información que se está usando y los objetivos que se persiguen al presentar la información.

Entonces, mencionaremos algunas consideraciones que conviene tomar en cuenta al momento de realizar cualquier gráfica a fin de que la información sea transmitida de la manera más eficaz posible y sin distorsiones:

1. El eje que represente a las frecuencias de las observaciones (comúnmente el vertical o de las ordenadas) debe comenzar en cero (0), de otra manera podría dar impresiones erróneas al comparar la altura, longitud o posición de las columnas, barras o líneas que representan las frecuencias.
2. La longitud de los espacios que representan a cada dato o intervalo (clase) en la gráfica deben ser iguales.
3. El tipo de gráfico debe coincidir por sus características con el tipo de información o el objetivo que se persigue al representarla, de otra manera la representación gráfica se convierte en un instrumento ineficaz, que produce más confusión que otra cosa, innecesario o productor de malinterpretaciones. Por ejemplo, si se desea representar la proporción de población masculina en un país conviene más usar una gráfica de pastel o circular que una gráfica de barras al compararla contra la población femenina; por un lado se puede apreciar dicha proporción, por el otro se aprecia cuál de las dos poblaciones es mayor.

Hay un punto que conviene remarcar: existe software que permite la construcción rápida y eficiente de gráficas a partir de bases de datos o hojas de cálculos, pero no importa cuán bonita, bien delineada, bien coloreada o bien presentada esté una gráfica, si no se han tomado en cuenta consideraciones de este tipo que tienen que ver más sobre el objetivo de estas herramientas y la Estadística: la transmisión eficiente de la información.

Para las distribuciones de frecuencias la representación gráfica más común es el histograma. Un ejemplo es el que se presenta a continuación y que representa el número de "visitas" que ha tenido este hipertexto de acuerdo a la hora de la visita.

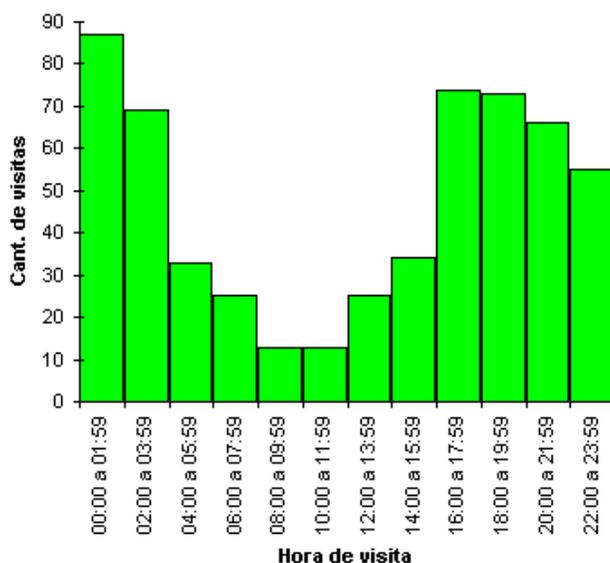


Figura 52 Ejemplo de Histograma

En el eje horizontal (o de las abscisas) se representan los intervalos de los datos, marcándose de manera continua las fronteras entre cada uno de los éstos. De esta manera, el histograma está compuesto rectángulos, cuyo número coincide con la cantidad de intervalos considerados, el ancho de la base de cada uno de esos rectángulos es la misma siempre y coincide con las fronteras de los intervalos, y la altura corresponde a la frecuencia de cada intervalo.

Es importante observar que resulta difícil utilizar este tipo de representación cuando existen intervalos abiertos o cuando los intervalos no son iguales entre sí.

Un tipo de gráfico muy parecido al histograma es la **gráfica de columnas**. Para este tipo de gráfica, elaboradas con rectángulos también, se pide que sus bases sean del mismo ancho y sus alturas equivalentes con las frecuencias. Para este tipo, a diferencia del histograma, no es necesario tener una escala horizontal continua, por lo que los rectángulos (o barras) no tienen que aparecer juntas entre sí.

Otra observación pertinente es que se pueden representar en la misma gráfica, utilizando las mismas escalas horizontales y verticales, varios datos correspondientes a las mismas variables producto de varias observaciones. Esto produce una gráfica con varias **series**, correspondiendo cada una de ellas a cada observación de la muestra (o población), y teniéndose una gráfica compuesta. Es conveniente que cada serie de datos (u observaciones) sean ilustradas o iluminadas de igual manera entre sí, pero distinta de las demás.

El ejemplo que sigue pertenece al comportamiento de las calificaciones parciales de tres alumnos de preparatoria. Las series (cada una de las calificaciones parciales) están

coloreadas con diferente color para mostrar el comportamiento tanto individual, como de cada uno de los alumnos con respecto a los demás. Es interesante observar que la escala horizontal no es continua (es nominal).

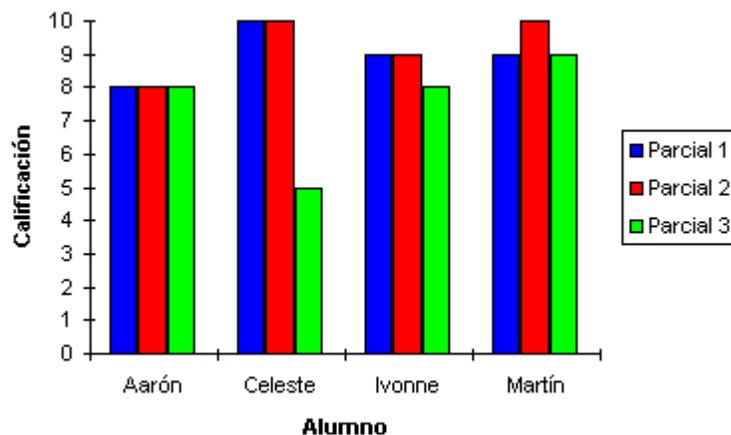


Figura 53 Ejemplo de diagrama de barras

Existe la posibilidad, y si los recursos lo permiten, de representar gráficos compuestos de una manera "tridimensional", es decir, con gráficos que posean no sólo dos ejes, sino tres; y en los que los rectángulos son sustituidos por prismas de base rectangular (ocasionalmente el *software* en el mercado permite utilizar prismas cuya base son polígonos regulares de más de cuatro lados, pirámides o cilindros). Un ejemplo es el siguiente:

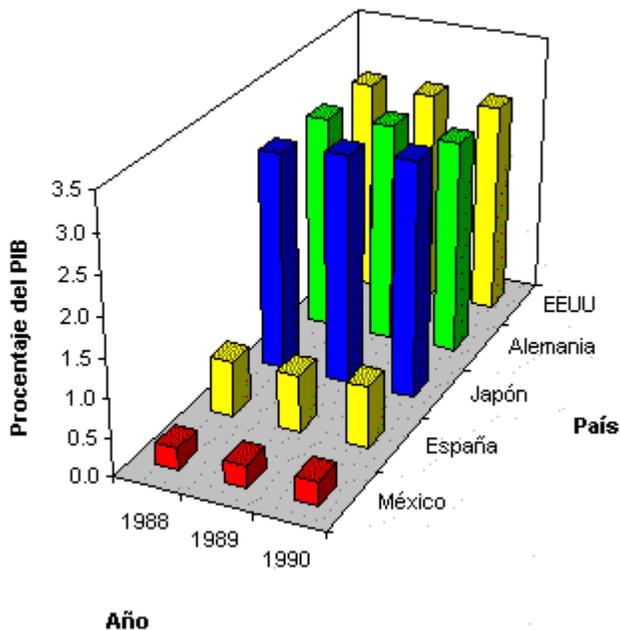


Figura 54 Ejemplo de diagrama de barras en 3D

donde se representa el porcentaje del PIB gastado en docencia e investigación por cinco países en el lapso de 1988 a 1999 (fuente: Revista "Ciencia y Desarrollo", 1994, XIX(114):12). Es importante considerar que este tipo de gráficos puede complicarse mucho, haciendo que la información sea menos legible.

También es posible realizar gráficos de barras horizontales, los cuales se parecen mucho a las gráficas de columnas, con la salvedad importante de que la función de los ejes se intercambian y el eje horizontal queda destinado a las frecuencias y el eje vertical a las clases.

Es muy común que este tipo de gráficos se utilicen para ilustrar el tamaño de una población dividida en estratos como, por ejemplo, son sus edades. El ejemplo que se presenta es la población de un país ficticio:

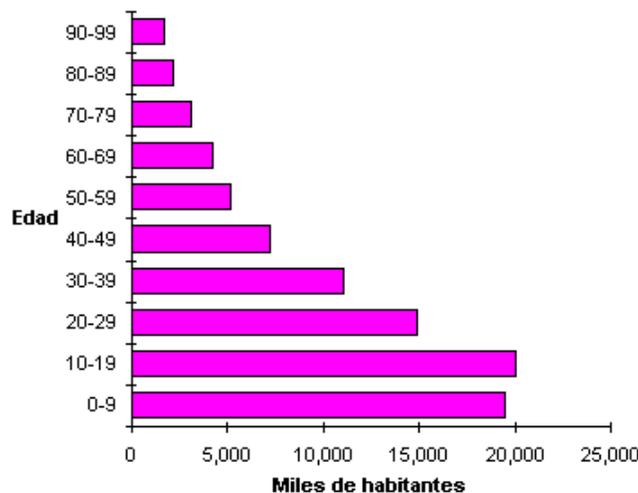


Figura 55 Ejemplo de diagrama de barras horizontales

A este tipo de gráficos en particular se le llama pirámide de edades por su forma. Incluso, cuando se compara la población masculina y femenina por estratos de edades, se estila utiliza el lado izquierdo para la población de un sexo y el lado derecho para el otro, el resultado es una "pirámide" casi simétrica (dependerá de la población en particular).

Cuando los datos se relacionan entre sí, es decir, cuando podemos decir que existe cierta continuidad entre las observaciones (como por ejemplo el crecimiento poblacional, la evolución del peso o estatura de una persona a través del tiempo, el desempeño académico de un estudiante a lo largo de su instrucción escolar, las variaciones presentadas en la medición realizada en algún experimento cada segundo o minuto) se pueden utilizar las gráficas de líneas, que consisten en una serie de puntos trazados en las intersecciones de las marcas de clase y las frecuencias de cada una, uniéndose consecutivamente con líneas:

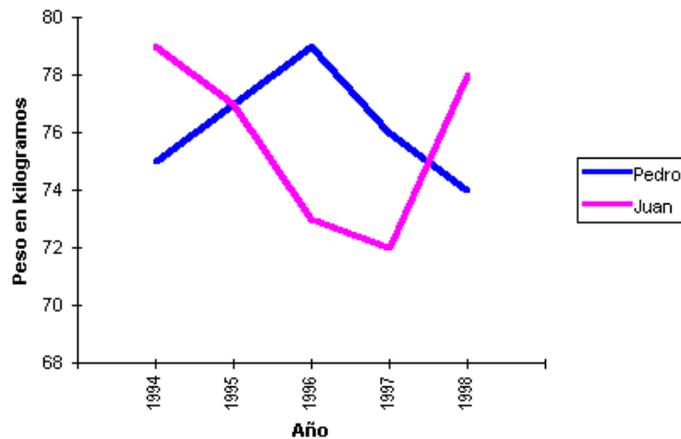


Figura 56 Ejemplo de diagrama de líneas

Este ejemplo muestra el comportamiento del peso corporal (en kilogramos) de dos individuos a lo largo de cinco observaciones anuales. Al igual que en el caso de las gráficas de columnas (y de otras más) es posible presentar varias series de observaciones (en este caso cada serie de observaciones son los pesos de un individuo).

Otra forma de representación de un uso menos común, y muy parecida a las gráficas de líneas, es el polígono de frecuencias. La diferencia fundamental entre ambas es que en el polígono de frecuencias se añaden dos clases con frecuencias cero: una antes de la primera clase con datos y otra después de la última. El resultado es que se "sujeta" la línea por ambos extremos al eje horizontal y lo que podría ser una línea separada del eje se convierte, junto con éste, en un polígono.

El siguiente ejemplo corresponde al porcentaje del PIB gastado en docencia e investigación durante el año de 1990 en cinco países (fuente: Revista "Ciencia y Desarrollo", 1994, XIX(114):12):

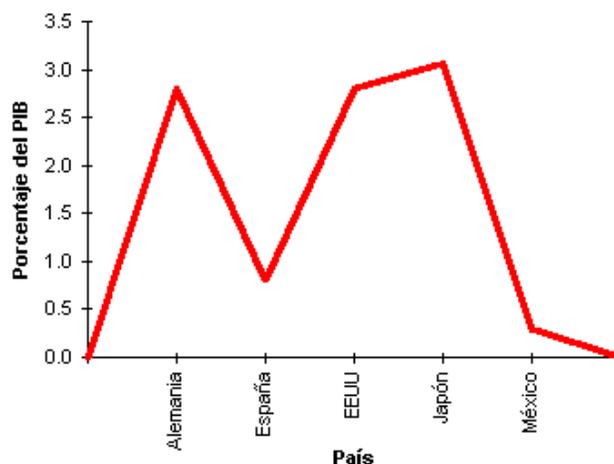


Figura 57 Ejemplo de diagrama de polígono de frecuencias

Una gráfica similar al polígono de frecuencias es la ojiva, pero ésta se obtiene de aplicar parcialmente la misma técnica a una distribución acumulativa y de igual manera que éstas, existen las ojivas mayor que y las ojivas menor que.

Existen dos diferencias fundamentales entre las ojivas y los polígonos de frecuencias (y por ésto la aplicación de la técnica es parcial):

1. Un extremo de la ojiva no se "amarra" al eje horizontal, para la ojiva mayor que sucede con el extremo izquierdo; para la ojiva menor que, con el derecho.
2. En el eje horizontal en lugar de colocar las marcas de clase se colocan las fronteras de clase. Para el caso de la ojiva mayor que es la frontera menor; para la ojiva menor que, la mayor.

Las siguientes son ejemplos de ojivas, a la izquierda la mayor que, a la derecha la menor que, utilizando los datos que se usaron para ejemplificar el histograma:

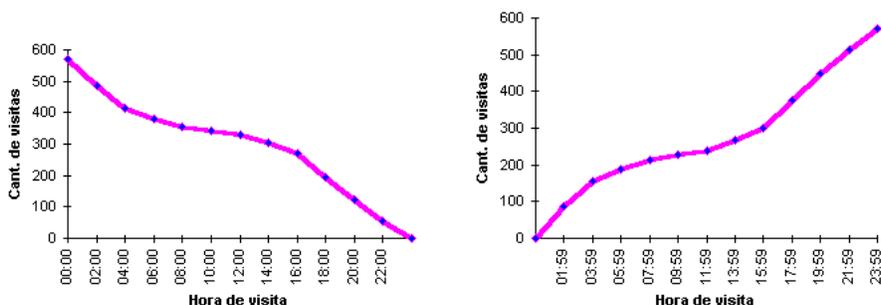
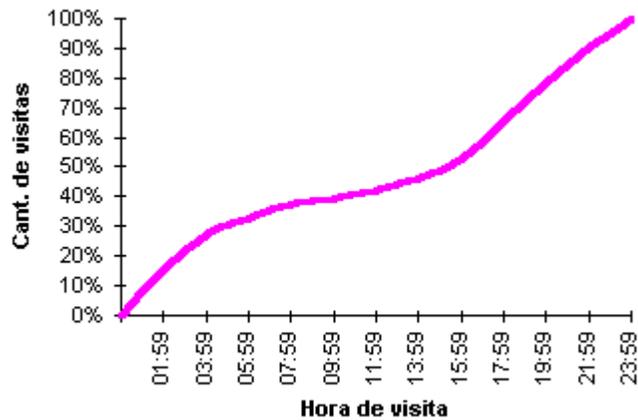


Figura 58 Ejemplo de diagrama de ojiva

La ojiva mayor que (izquierda) se le denomina de esta manera porque viendo el punto que está sobre la frontera de clase "4:00" se ven las visitas que se realizaron en una hora mayor que las 4:00 horas (en cuestiones temporales se diría: después de las 4:00 horas). De forma análoga, en la ojiva menor que la frecuencia que se representa en cada frontera de clase son el número de observaciones menores que la frontera señalada (en caso de tiempos sería el número de observaciones antes de la hora que señala la frontera).

Si se utiliza una distribución porcentual acumulativa entonces se obtiene una ojiva (mayor que o menor que según sea el caso) cuyo eje vertical tiene una escala que va del 0% al 100%. El siguiente ejemplo es la misma ojiva menor que que se acaba de usar, pero con una distribución porcentual:



En ocasiones, al comparar dos series de observaciones (o de datos) se utiliza una llamada gráfica de áreas, la cual consiste en rellenar el área que se encuentre debajo de las líneas que resultan de una gráfica de líneas.

El ejemplo que se presenta es la comparación del total de las especies de las familias del orden Carnívora y las que están amenazadas, en México, (fuente: Revista "Ciencia y Desarrollo", 1994, XIX(114):58):

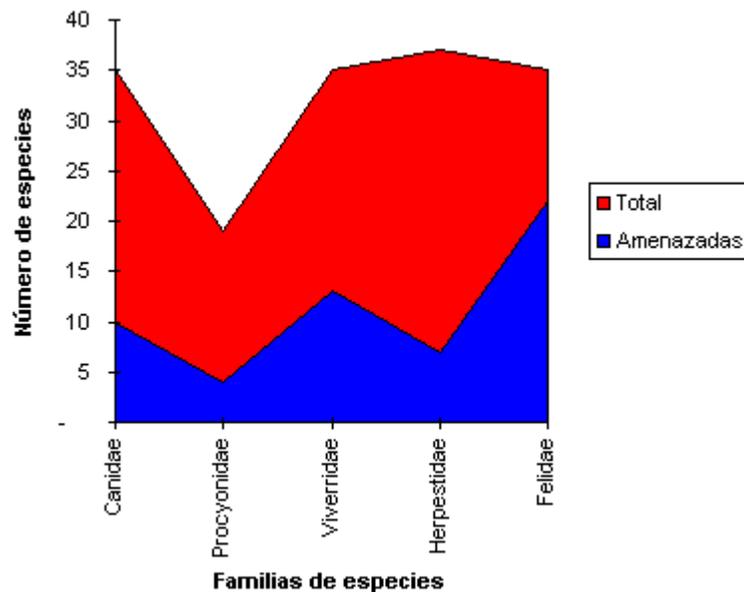


Figura 59 Ejemplo de diagrama de áreas

Cuando lo que se desea es resaltar las proporciones que representan algunos subconjuntos con respecto al total, es decir, cuando se está usando una escala categórica, conviene utilizar una gráfica llamada de pastel o circular.

Por ejemplo, para ilustrar la matrícula en licenciatura (en México) por áreas de conocimiento en el año de 1992 se puede usar algo así como sigue (Fuente: ANUIES,1995):

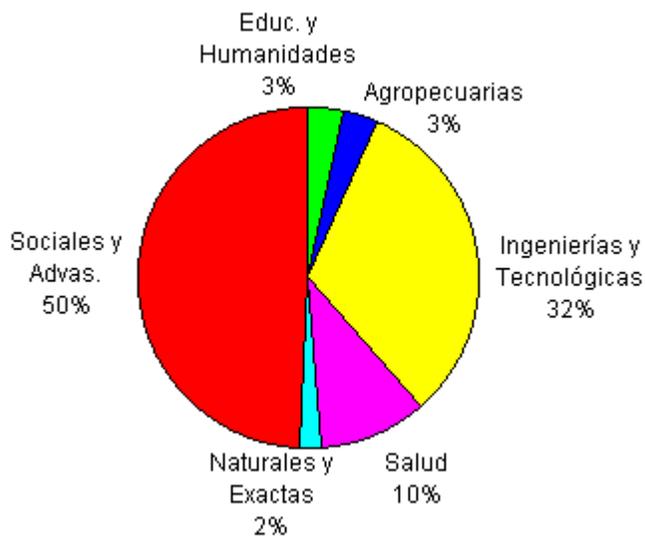
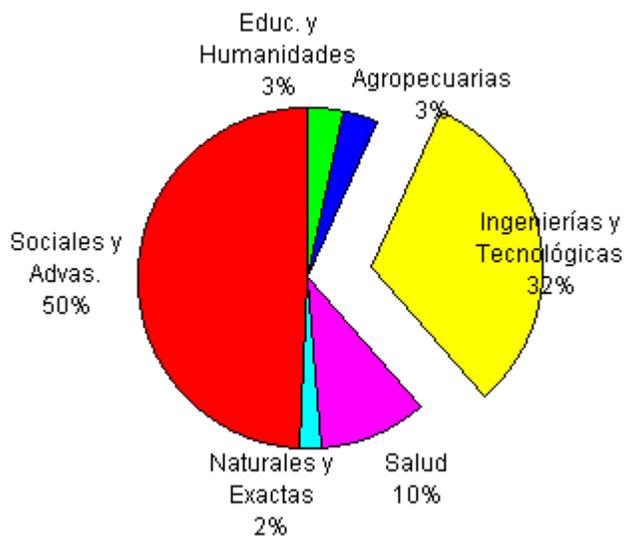


Figura 60 Ejemplo de diagrama pastel

De hecho, si se desea resaltar una de las categorías que se presentan, es válido tomar esa "rebanada" de la gráfica y separarla de las demás:



Hay que tomar algunas precauciones al utilizar este tipo de gráficos. Por un lado, comparar dos gráficos circulares (por ejemplo, si se quisieran comparar las proporciones de

matrículas en licenciatura por áreas de conocimiento en licenciatura para dos años distintos) resulta muy difícil y, por tanto, no es muy aconsejable.

Por otro lado, en ocasiones existen categorías con pocas frecuencias (por ejemplo, dos o tres con frecuencias relativas menores al 1% cada una), haciendo que la gráfica resulte "pesada" y las etiquetas se encimen. Una posible solución es juntarlas en una sola categoría (por ejemplo, la típica "otras" o "varias"), pero entonces habría que ponderar si se hace una gráfica extra con dichas observaciones únicamente, haciendo la anotación pertinente, o simplemente se ignoran por no resultar significativas.

Cuando se pretende ilustrar la dispersión de las observaciones realizadas, y así trabajar algunas cosas como correlaciones se puede utilizar una gráfica de dispersión. Por ejemplo, el ejemplo de la izquierda es la dispersión que se presenta al comparar el número de tesis doctorales en ciencias exactas contra el número de total de tesis doctorales (todo en México) en observaciones anuales entre 1984 y 1990 (fuente: Revista "Ciencia y Desarrollo", 1994, XIX(114):12):

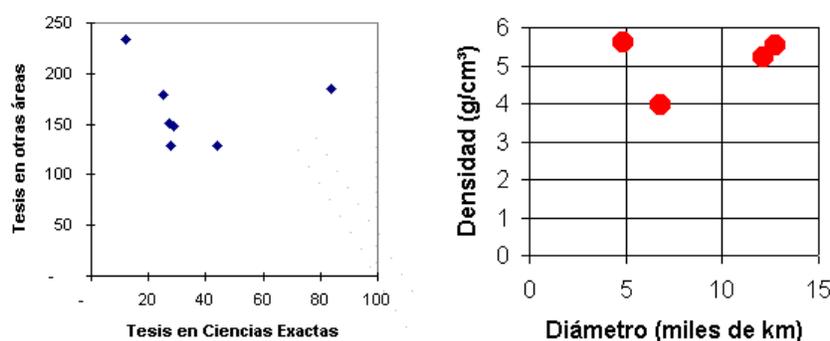


Figura 61 Ejemplo de diagrama de dispersión

La gráfica de la derecha es resultado de comparar el diámetro (en miles de kilómetros) de los planetas interiores del nuestro sistema solar contra sus densidades (en gramos por centímetro cúbico). Es interesante observar que los puntos parecen "seguir" una línea imaginaria que se asemeja a una recta, con excepción de un caso atípico: Mercurio.

Un tipo de gráfico similar a las gráficas de dispersión son las gráficas de burbujas, en las cuales se presenta la dispersión de las observaciones de la misma forma que aquéllas, pero se le añade la posibilidad de visualizar otra variable representada en el tamaño del punto, pues éstos se convierten en círculos (burbujas) con radios proporcionales a las magnitudes que representan.

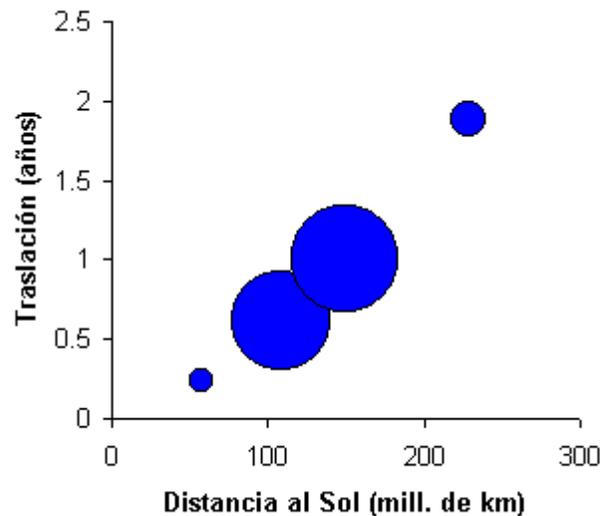


Figura 62 Ejemplo de diagrama de burbujas

Este ejemplo compara la distancia que existe en cada uno de los planetas interiores de nuestro sistema solar al Sol contra el tiempo que necesitan para recorrer sus órbitas, y el tamaño de las burbujas indica la masa de cada planeta.

7.2 Probabilidad

Muchos de los eventos que ocurren en la vida diaria no pueden ser predichos con exactitud desde antes por diversas razones, pues la mayoría de los hechos están influidos por factores externos. Además, existen aquellos sucesos que están directamente influidos por el azar, es decir, por procesos que no se está seguro de lo que va a ocurrir. Sin embargo, la probabilidad nos permite acercarnos a esos sucesos y estudiarlos, ponderando las posibilidades de su ocurrencia y proporcionando métodos para tales ponderaciones.

Precisamente, algunos de esos métodos proporcionados por la probabilidad nos llevan a descubrir que algunos sucesos tienen una mayor o menor probabilidad de ocurrir que la ponderación asignada a través del sentido común. Nuestros sentidos, la información previa que poseemos, nuestras creencias o posturas, nuestras inclinaciones, son algunos de los factores que intervienen para no permitirnos hacer ponderaciones reales y sistemáticas. La probabilidad nos permitirá estudiar los eventos de una manera sistemática y más cercana a la realidad, retribuyéndonos con información más precisa y confiable y, por tanto, más útil para las disciplinas humanas.

7.2.1 Eventos

Cuando se realiza un experimento, que es cualquier proceso que produce un resultado o una observación, se van a obtener un conjunto de valores. A este conjunto de valores que puede tomar una variable se le denomina espacio muestral.

Por ejemplo: Si se tiene un dado cualquiera, el espacio muestral (EM) es $EM=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Si existen más de una variable, el espacio muestral está formado por las combinaciones de valores de cada una de las variables.

Si tomamos un subconjunto cualquiera del espacio muestral tenemos lo que se denomina un evento, y si éste consta de un solo elemento entonces es un evento elemental.

Como se puede uno imaginar, existen eventos que siempre, no importa el número de experimentos o su situación, ocurren, y en cambio existen otros que nunca ocurren. Los que siempre ocurren son los eventos seguros, y los que nunca son los eventos imposibles.

Sin embargo, no todos los resultados son al azar, pues si un experimento es cualquier proceso entonces los resultados pueden tomar cualquier tipo de valor. Por esta razón, se define como experimento aleatorio al proceso en el que se pueden predecir con certeza la ocurrencia de sus eventos, con excepción del seguro o del imposible. Hay que hacer la observación que esta definición habla en términos generales y no específicamente sobre algún experimento en particular.

A aquélla variable que está asociada a un experimento de este tipo se le denomina variable aleatoria.

En cambio, a un experimento no aleatorio se le denomina experimento determinístico.

Cuando hablamos de varios eventos dentro del mismo experimento se pueden dar varios casos.

Si dos o más eventos no pueden ocurrir simultáneamente, se llaman eventos mutuamente excluyentes, es decir, que la intersección de ambos eventos es vacía.

Por otro lado, en ocasiones un evento o más eventos dependen de otro evento previo, es decir, un evento A ocurre dado que ocurrió un evento B. Si existe este tipo de relación entre eventos se dice que son eventos dependientes o condicionados (el evento A depende del evento B, o el resultado del evento A está condicionado al resultado del evento B). Por otro lado, si no existe tal relación entre eventos se dice que son eventos independientes. Los criterios de dependencia o de independencia se definirán más adelante, en términos de probabilidad condicional.

7.2.2 Probabilidad de eventos

Para calcular la probabilidad de eventos es necesario que éstos se comporten de una manera más o menos estable. Precisamente, se echa mano de la regularidad estadística, que es la propiedad de los fenómenos aleatorios, y que consiste en que al aumentar el número de repeticiones de un experimento en condiciones prácticamente constantes, la frecuencia relativa de ocurrencia para cada evento tiende a un valor fijo.

Sin embargo, al momento de definir la probabilidad de un evento podemos tomar en cuenta los siguientes criterios:

1. La probabilidad subjetiva de un evento se la asigna la persona que hace el estudio, y depende del conocimiento que esta persona tenga sobre el tema. Precisamente por su carácter de subjetividad no se considera con validez científica, aunque en la vida diaria es de las más comunes que se utilizan al no apoyarse más que en el sentido común y los conocimientos previos, y no en resultados estadísticos.
2. La probabilidad frecuencial de un evento es el valor fijo al que tienden las frecuencias relativas de ocurrencia del evento de acuerdo a la regularidad estadística. Esta definición sería la más real, pero proporciona probabilidades aproximadas, es decir, proporciona estimaciones y no valores reales. Además, los resultados son a posteriori, pues se necesita realizar el experimento para poder obtenerlo. (Para ver un ejemplo haz click aquí.)
3. La probabilidad clásica de un evento E, que denotaremos por P(E), se define como el número de eventos elementales que componen al evento E, entre el número de eventos elementales que componen el espacio muestral:

$$P(E) = \frac{\text{número de eventos elementales del evento E}}{\text{número de eventos elementales del espacio muestral}}$$

Es la definición más utilizada porque supone de antemano, y se necesita como requisito indispensable, que todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir.

7.2.3 Axiomas de probabilidad

Recordemos primero que las frecuencias relativas de una distribución tenían las siguientes propiedades:

1. Las frecuencias relativas son mayores o iguales que cero.
2. La frecuencia relativa del espacio muestral es igual a la unidad.
3. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, es decir que no ocurren simultáneamente, entonces la frecuencia relativa de su unión es la suma de las frecuencias relativas de cada uno.

Tomando en cuenta que la probabilidad de un evento, de acuerdo a la definición ya expuesta, es la frecuencia relativa cuando se aumenta el tamaño de la muestra, se tienen lo siguiente.

Si E es un evento de un espacio muestral S y P(E) es la probabilidad de E, entonces se satisfacen los axiomas de la probabilidad:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$.
2. $P(S) = 1$.
3. Si E_1, E_2, \dots , En son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) = \Sigma P(E_i)$$

7.2.4 Posibilidades y probabilidades

Se habla muy comúnmente en sitios de apuestas, como en las autódromos o hipódromos, de que "las apuestas a tal o cual participante es de x a y", es decir, que las posibilidades de que gane es de x a y. Esta manera de expresarse se refiere al uso de razones.

En términos generales, la posibilidad de que ocurra un evento se determina mediante la razón de la probabilidad de que ocurra a la probabilidad de que no ocurra.

Esto quiere decir que si la probabilidad de que un evento ocurra es p, entonces las posibilidades de que ocurra son x a y, es decir

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{1-p}$$

Tales que x y y son enteros positivos.

Ejemplo:

Si se tiran dos monedas normales (no trucadas), la probabilidad de que las dos monedas caigan cara es de $\frac{1}{4}$. Esto quiere decir si alguien apuesta a que las dos monedas no caen simultáneamente en cara, la posibilidad de ganar la apuesta es de

$$\frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{0.75}{0.25} = \frac{3}{1}$$

es decir, 3 a 1.

Hemos de considerar que si es mayor la probabilidad de que no ocurra un evento, entonces se acostumbra mencionar las posibilidades en contra del evento.

Ejemplo:

Si se tira un dado no trucado, sabemos que la probabilidad de obtener un cuatro es $\frac{1}{6}$, es decir que la posibilidad de obtener un cuatro es de 1 a 6; pero se acostumbra decir que las posibilidades en contra, esto es, de no obtener un cuatro es de 6 a 1.

Inversamente, en el caso de tener las posibilidades de un evento, entonces es fácil obtener su probabilidad, pues si la posibilidad de un evento es de x a y, entonces la probabilidad p de que ocurra tal evento es

$$p = \frac{x}{x+y}$$

Ejemplo:

En la Copa Mundial de Fútbol Francia 1998 se decía que el equipo mexicano tenía una posibilidad de 1 a 75 de llegar a ser el campeón del torneo.

Si se desea encontrar la probabilidad de que el equipo mexicano llegase a ser campeón, entonces se tiene que

$$p = \frac{1}{1+75} = \frac{1}{76} = 0.013157894$$

es la probabilidad de que ocurriese el evento.

Esto tiene la ventaja de que permite, en combinación con el tercer axioma de la probabilidad, medir la confiabilidad que tienen las opiniones de las personas sobre las posibilidades que le asignan a algunos eventos. Esto quiere decir que el cálculo de las probabilidades de dos eventos mutuamente excluyentes a partir de las posibilidades otorgadas de manera subjetiva resulta como un criterio de consistencia.

Ejemplo:

Un criminólogo piensa que las posibilidades de que en la próxima semana la cantidad de delitos en una ciudad aumente con respecto a la anterior es de 5 a 2, de que sea la misma cantidad de delitos es de 1 a 3 y las posibilidades de que aumente la cantidad o sea la misma es de 7 a 4.

Si se desea saber si son consistentes las probabilidades correspondientes habría que hacer los cálculos.

Las probabilidades de aumente la cantidad de delitos, sea igual la cantidad de delitos, y de que aumente o sea igual la cantidad de delitos es, respectivamente, de

$$\frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}, \quad \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{7}{7+4} = \frac{7}{11}$$

y dado que $\frac{5}{7} + \frac{1}{4} = \frac{20+7}{28} = \frac{27}{28}$ (como son eventos mutuamente excluyentes) no es lo mismo que $\frac{7}{11}$ entonces los criterios del criminólogo pueden ser cuestionados.

7.3 Simulación de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es una técnica que combina conceptos estadísticos (muestreo aleatorio) con la capacidad que tienen los ordenadores para generar números pseudo-aleatorios y automatizar cálculos.

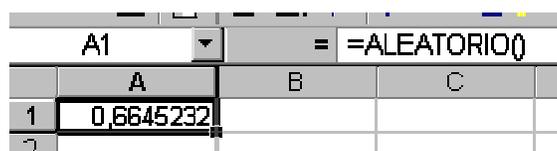
Los orígenes de esta técnica están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40 en el laboratorio de Los Alamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. En años posteriores, la simulación de Monte Carlo se ha venido aplicando a una infinidad de ámbitos como alternativa a los modelos matemáticos exactos o incluso como único medio de estimar soluciones para problemas complejos. Así, en la actualidad es posible encontrar modelos que hacen uso de simulación Monte Carlo en las áreas informática, empresarial, económica, industrial e incluso social. En otras palabras, la simulación de Monte Carlo está presente en todos aquellos ámbitos en los que el comportamiento aleatorio o probabilístico desempeña un papel fundamental - precisamente, el nombre de Monte Carlo proviene de la famosa ciudad de Mónaco, donde abundan los casinos de juego y donde el azar, la probabilidad y el comportamiento aleatorio conforman todo un estilo de vida.

Son muchos los autores que han apostado por utilizar hojas de cálculo para realizar simulación Monte Carlo. La potencia de las hojas de cálculo reside en su universalidad, en su facilidad de uso, en su capacidad para recalcular valores y, sobre todo, en las posibilidades que ofrece con respecto al análisis de escenarios (“what-if analysis”). Las últimas versiones de Excel incorporan, además, un lenguaje de programación propio, el Visual Basic for Applications, con el cual es posible crear auténticas aplicaciones de simulación destinadas al usuario final. En el mercado existen de hecho varios complementos de Excel (Add-Ins) específicamente diseñados para realizar simulación Monte Carlo.

7.3.1 Conceptos fundamentales

La función ALEATORIO() de Excel

Las hojas de cálculo como Excel (y cualquier lenguaje de programación estándar) son capaces de generar números pseudo-aleatorios provenientes de una distribución uniforme entre el 0 y el 1. Este tipo de números pseudo-aleatorios son los elementos básicos a partir de los cuales se desarrolla cualquier simulación por ordenador. En Excel, es posible obtener un número pseudo-aleatorio -proveniente de una distribución uniforme entre el 0 y el 1- usando la función ALEATORIO:



Los números generados mediante la función ALEATORIO tienen dos propiedades que los hacen equiparables a números completamente aleatorios:

1. Cada vez que se usa la función ALEATORIO, cualquier número real entre 0 y 1 tiene la misma probabilidad de ser generado (de ahí el nombre de distribución uniforme).
2. Los diferentes números generados son estadísticamente independientes unos de otros (es decir, el valor del número generado en un momento dado no depende de los generados con anterioridad).

La función ALEATORIO es una función volátil de Excel. Esto significa que cada vez que pulsamos la tecla F9 o cambiamos alguno de los inputs del modelo, todas las celdas donde aparezca la función ALEATORIO serán recalculadas de forma automática.

Se pueden encontrar ejemplos del uso de ALEATORIO en el propio menú de ayuda de Excel.

¿Qué es la simulación de Monte Carlo?

La simulación de Monte Carlo es una técnica cuantitativa que hace uso de la estadística y los ordenadores para imitar, mediante modelos matemáticos, el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos (por lo general, cuando se trata de sistemas cuyo estado va cambiando con el paso del tiempo, se recurre bien a la simulación de eventos discretos o bien a la simulación de sistemas continuos).

La clave de la simulación Monte Carlo consiste en crear un modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando aquellas variables (inputs del modelo) cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Una vez identificados dichos inputs o variables aleatorias, se lleva a cabo un experimento consistente en (1) generar – con ayuda del ordenador-muestras aleatorias (valores concretos) para dichos inputs, y (2) analizar el comportamiento del sistema ante los valores generados. Tras repetir n veces este experimento, dispondremos de n observaciones sobre el comportamiento del sistema, lo cual nos será de utilidad para entender el funcionamiento del mismo –obviamente, nuestro análisis será tanto más preciso cuanto mayor sea el número n de experimentos que llevemos a cabo.

Veamos un ejemplo sencillo:

En la imagen inferior se muestra un análisis histórico de 200 días sobre el número de consultas diarias realizadas a un sistema de información empresarial (EIS) residente en un servidor central. La tabla incluye el número de consultas diarias (0 a 5) junto con las frecuencias absolutas (número de días que se producen 0, 1, ..., 5 consultas), las frecuencias relativas ($10/200 = 0,05$, ...), y las frecuencias relativas acumuladas.

	A	B	C	D	E
1					
2		Consultas EIS	Frec. Abs. (días)	Frec. Relativa	Frec. Relat. Ac.
3		0	10	0,05	0,05
4		1	20	0,10	0,15
5		2	40	0,20	0,35
6		3	60	0,30	0,65
7		4	40	0,20	0,85
8		5	30	0,15	1,00
9		Total	200	1,00	
10					

Podemos interpretar la frecuencia relativa como la probabilidad de que ocurra el suceso asociado, en este caso, la probabilidad de un determinado número de consultas (así, p.e., la probabilidad de que se den 3 consultas en un día sería de 0,30), por lo que la tabla anterior nos proporciona la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta (la variable aleatoria es el número de consultas al EIS, que sólo puede tomar valores enteros entre 0 y 5).

Supongamos que queremos conocer el número esperado (o medio) de consultas por día. La respuesta a esta pregunta es fácil si recurrimos a la teoría de la probabilidad: Denotando por X a la variable aleatoria que representa el número diario de consultas al EIS, sabemos que:

$$E[X] = \sum_{i=0}^5 x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,10 + \dots + 5 \cdot 0,15 = 2,95$$

Por otra parte, también podemos usar simulación de Monte Carlo para estimar el número esperado de consultas diarias (en este caso se ha podido obtener el valor exacto usando teoría de probabilidad, pero ello no siempre será factible). Veamos cómo:

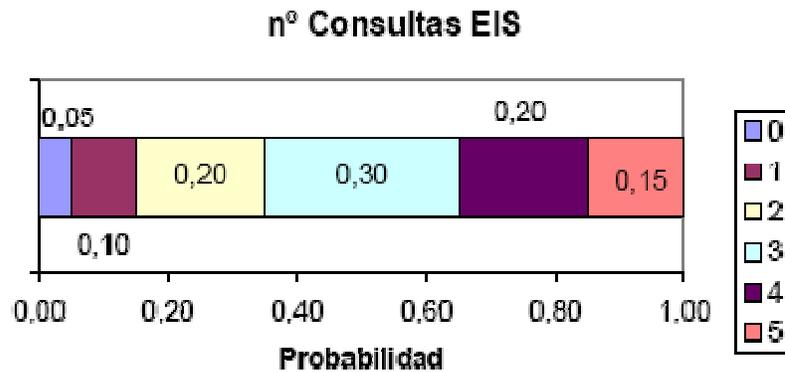
Cuando se conozca la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta, será posible usar la columna de frecuencias relativas acumuladas para obtener los llamados intervalos de números aleatorios asociados a cada suceso.

En este caso, los intervalos obtenidos son:

- [0,00 , 0,05) para el suceso 0
- [0,05 , 0,15) para el suceso 1
- [0,15 , 0,35) para el suceso 2
- [0,35 , 0,65) para el suceso 3
- [0,65 , 0,85) para el suceso 4

- $[0,85, 1,00)$ para el suceso 5

El gráfico siguiente nos muestra cada una de las probabilidades sobre el número de consultas. En él, se aprecia claramente la relación existente entre probabilidad de cada suceso y el área que éste ocupa.



Esto significa que, al generar un número pseudo-aleatorio con el ordenador (proveniente de una distribución uniforme entre 0 y 1), estaremos llevando a cabo un experimento cuyo resultado, obtenido de forma aleatoria y según la distribución de probabilidad anterior, estará asociado a un suceso. Así por ejemplo, si el ordenador nos proporciona el número pseudo-aleatorio 0,2567, podremos suponer que ese día se han producido 2 consultas al EIS.

Asignamos pues la función ALEATORIO a una casilla (la G1 en el caso de la imagen):

G1 = =ALEATORIO()							
	A	B	C	D	E	F	G
1							0,02755711
2		Consultas EIS	Frec. Abs. (días)	Frec. Relativa	Frec. Relat. Ac.		

Seleccionando la celda y “arrastrando” con el ratón desde el borde inferior derecho de la misma podemos obtener un listado completo de números pseudo-aleatorios:

92							0,93287364
93							0,96329721
94							0,75323996
95							0,7809585
96							0,00471791
97							0,5459221
98							0,71227573
99							0,47161266
100							0,92122832

A continuación, podemos usar la función SI de Excel para asignar un suceso a cada uno de los números pseudo-aleatorios generados (como veremos, otra forma de hacer esta asignación será usando la función BUSCARV):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1							0,10772119	1
2		Consultas EIS	Frec. Abs. (días)	Frec. Relativa	Frec. Relat. Ac.		0,1411781	
3		0	10	0,05	0,05		0,72144264	
4		1	20	0,10	0,15		0,80145062	
5		2	40	0,20	0,35		0,9573536	
6		3	60	0,30	0,65		0,34055854	
7		4	40	0,20	0,85		0,91703009	
8		5	30	0,15	1,00		0,04148589	
9		Total	200	1,00			0,64428827	
10							0,76643321	

Repetiendo el proceso de seleccionar y “arrastrar” obtendremos algo similar a:

94							0,20524576	2
95							0,98944028	6
96							0,17429246	6
97							0,63762462	3
98							0,32272825	2
99							0,72543037	4
100							0,16403118	2

Finalmente, usando la función PROMEDIO será posible calcular la media de los valores de la columna H:

= PROMEDIO(H:H)								
	C	D	E	F	G	H	I	
					0,23259154	2	2,96	
S	Frec. Abs. (días)	Frec. Relativa	Frec. Relat. Ac.		0,49286068	3		
	10	0,05	0,05		0,59610971	3		
	20	0,10	0,15		0,60479183	3		

En este caso, hemos obtenido un valor estimado que corresponde exactamente con el valor real anteriormente calculado vía la definición teórica de la media. Sin embargo, debido a la componente aleatoria intrínseca al modelo, normalmente obtendremos valores “cercaños” al valor real, siendo dichos valores diferentes unos de otros (cada simulación proporcionará sus propios resultados). Se puede comprobar este hecho pulsando repetidamente sobre la función F9 (cada vez que se pulsa dicha tecla, Excel genera nuevos valores aleatorios y, por tanto, nuevos valores para la columna H y la casilla I1). Si en lugar de usar una muestra aleatoria formada por 100 observaciones hubiésemos usado una formada por 10, los valores que obtendríamos al pulsar repetidamente F9 no serían estimaciones tan buenas al valor real. Por el contrario, es de esperar que si hubiésemos usado 1.000 (o mejor aún 10.000) observaciones, los valores que obtendríamos en la casilla I1 estarían todos muy cercanos al valor real.