Modelado del mercado spot de energía y determinación de precios de derivados de energía

Un anásisis técnico

René J. Meziat

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

Finanzas computacionales, 2008

Esquema

Esquema

Esquema

Esquema

Características del mercado de energía
(especialmente evidentes en el mercado de electricidad)

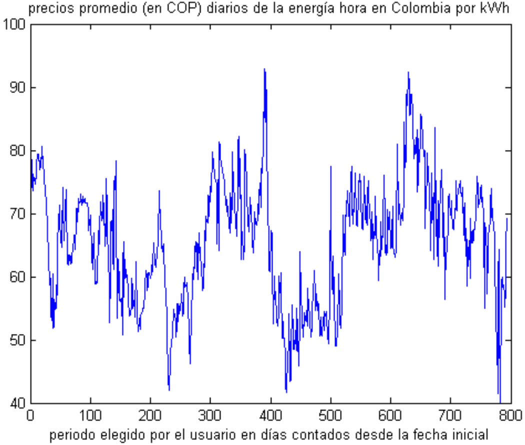
- Comportamiento de reversión a la media
- Existencia de saltos o picos

Características del mercado de energía
(especialmente evidentes en el mercado de electricidad)

- Comportamiento de reversión a la media
- Existencia de saltos o picos

Características del mercado de energía

(especialmente evidentes en el mercado de electricidad)



Esquema

El modelo más simple

- Término de reversión a la media con ruido Gaussiano
- Sin considerar los saltos (aunque son evidentes en los datos)

El modelo más simple

- Término de reversión a la media con ruido Gaussiano
- Sin considerar los saltos (aunque son evidentes en los datos)

El modelo más simple

$$dP(t) = \alpha(\mu - \ln P(t))\,dt + \sigma P(t)\,dW(t)$$

α: tasa de reversión a la media

μ: relacionada con el nivel medio a largo plazo del logaritmo de los precios

σ: relacionada con la volatilidad en los precios

W: proceso Weiner estándar

El modelo más simple

$$dP(t) = \alpha(\mu - \ln P(t))\, dt + \sigma P(t)\, dW(t)$$

α: tasa de reversión a la media

μ: relacionada con el nivel medio a largo plazo del logaritmo de los precios

σ: relacionada con la volatilidad en los precios

W: proceso Weiner estándar

El modelo más simple

$$dP(t) = \alpha(\mu - \ln P(t))\, dt + \sigma P(t)\, dW(t)$$

α: tasa de reversión a la media

μ: relacionada con el nivel medio a largo plazo del logaritmo de los precios

σ: relacionada con la volatilidad en los precios

W: proceso Weiner estándar

El modelo más simple

$$dP(t) = \alpha(\mu - \ln P(t))\,dt + \sigma P(t)\,dW(t)$$

- α: tasa de reversión a la media
- μ: relacionada con el nivel medio a largo plazo del logaritmo de los precios
- σ: relacionada con la volatilidad en los precios
- W: proceso Weiner estándar

El modelo más simple

$$dP(t) = \alpha(\mu - \ln P(t))\, dt + \sigma P(t)\, dW(t)$$

α: tasa de reversión a la media

μ: relacionada con el nivel medio a largo plazo del logaritmo de los precios

σ: relacionada con la volatilidad en los precios

W: proceso Weiner estándar

Solución de la ecuación diferencial estocástica (SDE)

Sustituimos

$$z = \ln P,$$
$$dz = d(\ln P).$$

Usando el Lema de Ito,

$$d(\ln P) = \left[\frac{1}{P}[\alpha(\mu - \ln P)P] + 0 - \frac{1}{2P^2}\sigma^2 (dP)^2\right] dt + \frac{1}{P}\sigma P\, dW,$$

$$dz = \alpha(\mu - \ln P_t) + \sigma\, dW_t - \frac{\sigma^2}{2} dt.$$

Entonces,

$$dz_t = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z_t\right) dt + \sigma\, dW_t.$$

Solución de la ecuación diferencial estocástica (SDE)

Sustituimos

$$z = \ln P,$$
$$dz = d(\ln P).$$

Usando el Lema de Ito,

$$d(\ln P) = \left[\frac{1}{P}[\alpha(\mu - \ln P)P] + 0 - \frac{1}{2P^2}\sigma^2 (dP)^2\right] dt + \frac{1}{P}\sigma P \, dW,$$
$$dz = \alpha(\mu - \ln P_t) + \sigma \, dW_t - \frac{\sigma^2}{2} dt.$$

Entonces,

$$dz_t = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z_t\right) dt + \sigma \, dW_t.$$

Solución de la ecuación diferencial estocástica (SDE)

Sustituimos

$$z = \ln P,$$
$$dz = d(\ln P).$$

Usando el Lema de Ito,

$$d(\ln P) = \left[\frac{1}{P}[\alpha(\mu - \ln P)P] + 0 - \frac{1}{2P^2}\sigma^2\,(dP)^2\right]\,dt + \frac{1}{P}\sigma P\,dW,$$
$$dz = \alpha(\mu - \ln P_t) + \sigma\,dW_t - \frac{\sigma^2}{2}\,dt.$$

Entonces,

$$dz_t = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z_t\right)\,dt + \sigma\,dW_t.$$

La ecuación del modelo es similar al Modelo de Vasicek

Consideremos

$$Y = e^{\alpha t} z.$$

De nuevo por el Lema de Ito,

$$dY = d(e^{\alpha t} z) = e^{\alpha t}\, dz_t + \alpha e^{\alpha t} z\, dt + 0.$$

Usando la expresión para dz_t,

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} z) &= e^{\alpha t}\left[\alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z\right) dt + \sigma\, dW_t\right] + \alpha e^{\alpha t} z\, dt \\ &= \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) e^{\alpha t}\, dt - \sigma e^{\alpha t}\, dW_t. \end{aligned}$$

La ecuación del modelo es similar al Modelo de Vasicek

Consideremos

$$Y = e^{\alpha t} z.$$

De nuevo por el Lema de Ito,

$$dY = d(e^{\alpha t} z) = e^{\alpha t}\, dz_t + \alpha e^{\alpha t} z\, dt + 0.$$

Usando la expresión para dz_t,

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} z) &= e^{\alpha t}\left[\alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z\right) dt + \sigma\, dW_t\right] + \alpha e^{\alpha t} z\, dt \\ &= \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) e^{\alpha t}\, dt - \sigma e^{\alpha t}\, dW_t. \end{aligned}$$

La ecuación del modelo es similar al Modelo de Vasicek

Consideremos

$$Y = e^{\alpha t} z.$$

De nuevo por el Lema de Ito,

$$dY = d(e^{\alpha t} z) = e^{\alpha t}\, dz_t + \alpha e^{\alpha t} z\, dt + 0.$$

Usando la expresión para dz_t,

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} z) &= e^{\alpha t}\left[\alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z\right) dt + \sigma\, dW_t\right] + \alpha e^{\alpha t} z\, dt \\ &= \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) e^{\alpha t}\, dt - \sigma e^{\alpha t}\, dW_t. \end{aligned}$$

La ecuación del modelo es similar al Modelo de Vasicek

Integrando,

$$e^{\alpha t_{i+1}} z_{i+1} - e^{\alpha t_i} z_i = \alpha \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, ds + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

Despejando,

$$z_{i+1} = z_i e^{-\alpha \Delta t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) \left(1 - e^{-\alpha \Delta t}\right) + \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s,$$

donde $\Delta = t_{i+1} - t_i$.

La ecuación del modelo es similar al Modelo de Vasicek

Integrando,

$$e^{\alpha t_{i+1}} z_{i+1} - e^{\alpha t_i} z_i = \alpha \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s} \, ds + \sigma \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s} \, dW_s .$$

Despejando,

$$z_{i+1} = z_i e^{-\alpha \Delta t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) \left(1 - e^{-\alpha \Delta t} \right) + \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s} \, dW_s ,$$

donde $\Delta = t_{i+1} - t_i$.

Esquema

De una ecuación discretizada a una ecuación algebraica

Restando el término z_i,

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) =$$

$$z(t_i)(e^{-\alpha \Delta t} - 1) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha \Delta t}) + \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

Podemos analizar esta ecuación como

$$Y = mX + c + \epsilon,$$

$$m = (e^{-\alpha \Delta t} - 1), \quad c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha \Delta t}),$$

$$\epsilon = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

De una ecuación discretizada a una ecuación algebraica

Restando el término z_i,

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) =$$

$$z(t_i)(e^{-\alpha\Delta t} - 1) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

Podemos analizar esta ecuación como

$$Y = mX + c + \epsilon,$$

$$m = (e^{-\alpha\Delta t} - 1), \quad c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t}),$$

$$\epsilon = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

De una ecuación discretizada a una ecuación algebraica

Restando el término z_i,

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) =$$

$$z(t_i)(e^{-\alpha\Delta t}-1)+\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1-e^{-\alpha\Delta t})+\sigma e^{-\alpha t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

Podemos analizar esta ecuación como

$$Y = mX + c + \epsilon,$$

$$m = (e^{-\alpha\Delta t} - 1), \quad c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t}),$$

$$\epsilon = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

De una ecuación discretizada a una ecuación algebraica

Restando el término z_i,

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) =$$

$$z(t_i)(e^{-\alpha\Delta t} - 1) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

Podemos analizar esta ecuación como

$$Y = mX + c + \epsilon,$$

$$m = (e^{-\alpha\Delta t} - 1), \quad c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t}),$$

$$\epsilon = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

De una ecuación discretizada a una ecuación algebraica

Restando el término z_i,

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) =$$

$$z(t_i)(e^{-\alpha\Delta t}-1)+\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1-e^{-\alpha\Delta t})+\sigma e^{-\alpha t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

Podemos analizar esta ecuación como

$$Y = mX + c + \epsilon,$$

$$m = (e^{-\alpha\Delta t} - 1), \quad c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)(1 - e^{-\alpha\Delta t}),$$

$$\epsilon = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s.$$

La ecuación algebraica como sistema de ecuaciones lineales

$$Y = XA + \epsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix},$$

ϵ es el término de ruido o residuo.

La ecuación algebraica como sistema de ecuaciones lineales

$$Y = XA + \epsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix},$$

ϵ es el término de ruido o residuo.

La ecuación algebraica como sistema de ecuaciones lineales

$$Y = XA + \epsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix},$$

ϵ es el término de ruido o residuo.

La ecuación algebraica como sistema de ecuaciones lineales

$$Y = XA + \epsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix},$$

ϵ es el término de ruido o residuo.

La ecuación algebraica como sistema de ecuaciones lineales

$$Y = XA + \epsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix},$$

ϵ es el término de ruido o residuo.

La pendiente de la línea de regresión

$$m = (e^{-\alpha \Delta t} - 1)$$

Tomando logaritmo natural,

$$-\alpha \Delta t = \ln(m + 1).$$

Entonces,

$$\alpha = \frac{-\ln(m+1)}{\Delta t}.$$

La pendiente de la línea de regresión

$$m = (e^{-\alpha \Delta t} - 1)$$

Tomando logaritmo natural,

$$-\alpha \Delta t = \ln(m + 1).$$

Entonces,

$$\alpha = \frac{-\ln(m+1)}{\Delta t}.$$

La pendiente de la línea de regresión

$$m = (e^{-\alpha \Delta t} - 1)$$

Tomando logaritmo natural,

$$-\alpha \Delta t = \ln(m+1).$$

Entonces,

$$\alpha = \frac{-\ln(m+1)}{\Delta t}.$$

El intercepto de la línea de regresión

$$c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right)$$

Despejando,

$$\mu = \frac{c}{\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right)} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

El intercepto de la línea de regresión

$$c = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right)$$

Despejando,

$$\mu = \frac{c}{\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right)} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

$$\epsilon = Y - mX - c$$

Queremos minimizar la varianza

$$\mathrm{Var}(\epsilon) = \mathbb{E}(\epsilon^2) - [\mathbb{E}(\epsilon)]^2.$$

Requerimos que

$$\mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}(Y - mX - c) = 0.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

$$\epsilon = Y - mX - c$$

Queremos minimizar la varianza

$$\mathrm{Var}(\epsilon) = \mathbb{E}(\epsilon^2) - [\mathbb{E}(\epsilon)]^2.$$

Requerimos que

$$\mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}(Y - mX - c) = 0.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

$$\epsilon = Y - mX - c$$

Queremos minimizar la varianza

$$\mathrm{Var}(\epsilon) = \mathbb{E}(\epsilon^2) - [\mathbb{E}(\epsilon)]^2.$$

Requerimos que

$$\mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}(Y - mX - c) = 0.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\epsilon) &= \mathbb{E}[Y - mX - c)^2] \\ &= \mathbb{E}[(Y - mX)^2 - 2c(Y - mX) + c^2] \\ &= \mathbb{E}[Y^2 - 2mXY + m^2X^2 - 2cY + 2mcX + c^2]\end{aligned}$$

Por linealidad del operador $\mathbb{E}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\epsilon) &= \mathbb{E}(Y^2) - 2m\mathbb{E}(XY) + m^2\mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(Y) + 2mc\mathbb{E}(X) + c^2 \\ &= G(m, c),\end{aligned}$$

que solamente depende de m y c.

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\epsilon) &= \mathbb{E}[Y - mX - c)^2] \\ &= \mathbb{E}[(Y - mX)^2 - 2c(Y - mX) + c^2] \\ &= \mathbb{E}[Y^2 - 2mXY + m^2X^2 - 2cY + 2mcX + c^2]\end{aligned}$$

Por linealidad del operador $\mathbb{E}$,

$$\mathrm{Var}(\epsilon) = \mathbb{E}(Y^2) - 2m\mathbb{E}(XY) + m^2\mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(Y) + 2mc\mathbb{E}(X) + c^2$$

$$= G(m, c),$$

que solamente depende de m y c.

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\epsilon) &= \mathbb{E}[Y - mX - c)^2] \\
&= \mathbb{E}[(Y - mX)^2 - 2c(Y - mX) + c^2] \\
&= \mathbb{E}[Y^2 - 2mXY + m^2X^2 - 2cY + 2mcX + c^2]
\end{aligned}
$$

Por linealidad del operador $\mathbb{E}$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\epsilon) &= \mathbb{E}(Y^2) - 2m\mathbb{E}(XY) + m^2\mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(Y) + 2mc\mathbb{E}(X) + c^2 \\
&= G(m, c),
\end{aligned}
$$

que solamente depende de m y c.

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Usando el cáculo de una variable para optimización,

$$\frac{\partial G}{\partial m} = -2\mathbb{E}(XY) + 2m\mathbb{E}(X^2) + 2c\mathbb{E}(X) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = -2\mathbb{E}(Y) + 2m\mathbb{E}(X) + 2c = 0.$$

Queda probado nuestro requerimiento:

$$-2\mathbb{E}(Y) + 2m\mathbb{E}(X) + 2c = 0$$
$$\mathbb{E}(Y) - m\mathbb{E}(X) - c = 0$$
$$\mathbb{E}(Y - mX - 2c) = \mathbb{E}(\epsilon) = 0.$$

Usando el cáculo de una variable para optimización,

$$\frac{\partial G}{\partial m} = -2\mathbb{E}(XY) + 2m\mathbb{E}(X^2) + 2c\mathbb{E}(X) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = -2\mathbb{E}(Y) + 2m\mathbb{E}(X) + 2c = 0.$$

Queda probado nuestro requerimiento:

$$\begin{gathered} -2\mathbb{E}(Y) + 2m\mathbb{E}(X) + 2c = 0 \\ \mathbb{E}(Y) - m\mathbb{E}(X) - c = 0 \\ \mathbb{E}(Y - mX - 2c) = \mathbb{E}(\epsilon) = 0. \end{gathered}$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Establecemos el sistema lineal

$$\mathbb{E}(X^2)m + \mathbb{E}(X)c = \mathbb{E}(XY)$$

$$\mathbb{E}(X)m + c = \mathbb{E}(Y).$$

Resolviendo,

$$m\left[\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\right] = \left[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right]$$

$$m\,\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Establecemos el sistema lineal

$$\mathbb{E}(X^2)m + \mathbb{E}(X)c = \mathbb{E}(XY)$$

$$\mathbb{E}(X)m + c = \mathbb{E}(Y).$$

Resolviendo,

$$m\left[\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\right] = \left[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right]$$

$$m\,\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Establecemos el sistema lineal

$$\mathbb{E}(X^2)m + \mathbb{E}(X)c = \mathbb{E}(XY)$$
$$\mathbb{E}(X)m + c = \mathbb{E}(Y).$$

Resolviendo,

$$m\left[\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\right] = \left[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right]$$
$$m\,\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Entonces,

$$m = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X^2} \qquad \text{y} \qquad c = \mathbb{E}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)\mathbb{E}(X)}{\sigma_X^2}.$$

Remplazando estos valores óptimos en la expresión para $\mathrm{Var}(\epsilon)$ y combinando términos,

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{min}}(\epsilon) = \sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Entonces,

$$m = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X^2} \qquad \text{y} \qquad c = \mathbb{E}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)}{\sigma_X^2}.$$

Remplazando estos valores óptimos en la expresión para $\mathrm{Var}(\epsilon)$ y combinando términos,

$$\mathrm{Var}_{\min}(\epsilon) = \sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2}{\sigma_X^2}.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del residuo)

Entonces,

$$m = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X^2} \qquad \text{y} \qquad c = \mathbb{E}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)\mathbb{E}(X)}{\sigma_X^2}.$$

Remplazando estos valores óptimos en la expresión para $\mathrm{Var}(\epsilon)$ y combinando términos,

$$\mathrm{Var}_{\min}(\epsilon) = \sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2}{\sigma_X^2}.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del modelo)

$$\epsilon_{\text{modelo}} = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s$$

$$\mathrm{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \mathbb{E}(\epsilon_{\text{modelo}}^2)$$

Entonces,

$$\mathrm{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \mathbb{E}\left[\sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s\right)^2\right].$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del modelo)

$$\epsilon_{\text{modelo}} = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s} \, dW_s$$

$$\text{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \mathbb{E}(\epsilon^2_{\text{modelo}})$$

Entonces,

$$\text{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \mathbb{E}\left[\sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s} \, dW_s\right)^2\right].$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del modelo)

$$\epsilon_{\text{modelo}} = \sigma e^{-\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s$$

$$\text{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \mathbb{E}(\epsilon^2_{\text{modelo}})$$

Entonces,

$$\text{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \mathbb{E}\left[\sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s\right)^2\right].$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del modelo)

Teorema de isometría de Ito

Si f pertenece a $H_2[0, T]$, el espacio de funciones aleatorias definido para todo t en $[0, T]$, y $\int_0^T \mathbb{E}(f(t))^2\, dt < \infty$, entonces

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t)\, dW(t)\right] = 0$$

y

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(t)\, dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}[f(t)]^2\, dt.$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del modelo)

Usando el teorema de isometría de Ito,

$$\begin{aligned}\sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s \right)^2 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{2\alpha s}\, ds \\ &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \frac{1}{2\alpha} \left[e^{2\alpha s} \right]_{s=t_i}^{s=t_{i+1}} \\ &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \frac{1}{2\alpha} \left[e^{2\alpha t_{i+1}} - e^{2\alpha t_i} \right].\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathrm{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha \Delta t}).$$

El parámetro de volatilidad
(la varianza del modelo)

Usando el teorema de isometría de Ito,

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha s}\, dW_s \right)^2 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{2\alpha s}\, ds \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \frac{1}{2\alpha} \left[e^{2\alpha s} \right]_{s=t_i}^{s=t_{i+1}} \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t_{i+1}} \frac{1}{2\alpha} \left[e^{2\alpha t_{i+1}} - e^{2\alpha t_i} \right].
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\mathrm{Var}(\epsilon_{\text{modelo}}) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha \Delta t}).
$$

El parámetro de volatilidad

$$\mathrm{Var}(\epsilon_{\mathrm{modelo}}) = \mathrm{Var}_{\mathrm{min}}(\epsilon)$$

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t}) = \sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2}{\sigma_X^2}.$$

Entonces,

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\left[\sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2}{\sigma_X^2}\right].$$

El parámetro de volatilidad

$$\mathrm{Var}(\epsilon_{\mathrm{modelo}}) = \mathrm{Var}_{\mathrm{min}}(\epsilon)$$

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t}) = \sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}.$$

Entonces,

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\left[\sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}\right].$$

El parámetro de volatilidad

$$\mathrm{Var}(\epsilon_{\mathrm{modelo}}) = \mathrm{Var}_{\mathrm{min}}(\epsilon)$$

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t}) = \sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}.$$

Entonces,

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\left[\sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}\right].$$

Resumen

Las ecuaciones para los parámetros en su orden de estimación

$$\alpha = \frac{-\ln(m+1)}{\Delta t}$$

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\left[\sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2}{\sigma_X^2}\right]$$

$$\mu = \frac{c}{(1 - e^{-\alpha\Delta t})} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

Resumen

Las ecuaciones para los parámetros en su orden de estimación

$$\alpha = \frac{-\ln(m+1)}{\Delta t}$$

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\left[\sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}\right]$$

$$\mu = \frac{c}{(1 - e^{-\alpha\Delta t})} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

Resumen

Las ecuaciones para los parámetros en su orden de estimación

$$\alpha = \frac{-\ln(m+1)}{\Delta t}$$

$$\sigma^2 = \frac{2\alpha}{(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}\left[\sigma_Y^2 - \frac{[\mathrm{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_X^2}\right]$$

$$\mu = \frac{c}{(1 - e^{-\alpha\Delta t})} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

Esquema

La distribución de probabilidad subyacente

De acuerdo con nuestro modelo inicial, asumimos que la distribución condicional subyacente de los log-precios con parámetros α, μ y σ es Gaussiana en cada paso de tiempo con media ν_i y varianza ω_i^2.

$$\nu_{i+1} = \mathbb{E}[z_{i+1}|z_i]$$

$$\omega_{i+1}^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha\tau}\, dW_\tau \right)^2$$

La distribución de probabilidad subyacente

De acuerdo con nuestro modelo inicial, asumimos que la distribución condicional subyacente de los log-precios con parámetros α, μ y σ es Gaussiana en cada paso de tiempo con media ν_i y varianza ω_i^2.

$$\nu_{i+1} = \mathbb{E}[z_{i+1}|z_i]$$

$$\omega_{i+1}^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha\tau} \, dW_\tau \right)^2$$

La distribución de probabilidad subyacente

De acuerdo con nuestro modelo inicial, asumimos que la distribución condicional subyacente de los log-precios con parámetros α, μ y σ es Gaussiana en cada paso de tiempo con media ν_i y varianza ω_i^2.

$$\nu_{i+1} = \mathbb{E}[z_{i+1} | z_i]$$

$$\omega_{i+1}^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\alpha\tau} \, dW_\tau \right)^2$$

La media

$$\nu_i = \mathbb{E}\left[z_i e^{-\alpha t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right) + \sigma e^{-\alpha t_i} \int_0^{t_i} e^{\alpha\tau}\, dW_\tau \right]$$

$$= \mathbb{E}\left[z_0 e^{-\alpha t_i}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)\right] + \sigma e^{-\alpha t_i}\,\mathbb{E}\left[\int_0^{t_i} e^{\alpha\tau}\, dW_\tau\right]$$

$$= z_0 e^{-\alpha t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)$$

La media

$$
\begin{aligned}
\nu_i &= \mathbb{E}\left[z_i e^{-\alpha t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right) + \sigma e^{-\alpha t_i} \int_0^{t_i} e^{\alpha\tau}\, dW_\tau\right] \\
&= \mathbb{E}\left[z_0 e^{-\alpha t_i}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)\right] \\
&\qquad + \sigma e^{-\alpha t_i} \mathbb{E}\left[\int_0^{t_i} e^{\alpha\tau}\, dW_\tau\right] \\
&= z_0 e^{-\alpha t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)
\end{aligned}
$$

La media

$$\begin{aligned}
\nu_i &= \mathbb{E}\left[z_i e^{-\alpha t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right) + \sigma e^{-\alpha t_i} \int_0^{t_i} e^{\alpha \tau}\, dW_\tau\right] \\
&= \mathbb{E}\left[z_0 e^{-\alpha t_i}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)\right] \\
&\qquad + \sigma e^{-\alpha t_i}\, \mathbb{E}\left[\int_0^{t_i} e^{\alpha \tau}\, dW_\tau\right] \\
&= z_0 e^{-\alpha t_i} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)
\end{aligned}$$

La varianza

$$\omega_i^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{\alpha \tau} \, dW_\tau \right)^2$$

$$= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{2\alpha \tau} \, d_\tau \right)$$

$$= \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha t_i}}{2\alpha} \left(e^{2\alpha t_i} - 1 \right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha t_i} \right)$$

La varianza

$$
\begin{aligned}
\omega_i^2 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{\alpha\tau}\, dW_\tau \right)^2 \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{2\alpha\tau}\, d_\tau \right) \\
&= \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha t_i}}{2\alpha} \left(e^{2\alpha t_i} - 1 \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha t_i} \right)
\end{aligned}
$$

La varianza

$$
\begin{aligned}
\omega_i^2 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{\alpha\tau} \, dW_\tau \right)^2 \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{2\alpha\tau} \, d_\tau \right) \\
&= \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha t_i}}{2\alpha} \left(e^{2\alpha t_i} - 1 \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha t_i} \right)
\end{aligned}
$$

La varianza

$$
\begin{aligned}
\omega_i^2 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{\alpha\tau} \, dW_\tau \right)^2 \\
&= \sigma^2 e^{-2\alpha t_i} \left(\int_0^{t_{i+1}} e^{2\alpha\tau} \, d_\tau \right) \\
&= \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha t_i}}{2\alpha} \left(e^{2\alpha t_i} - 1 \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha t_i} \right)
\end{aligned}
$$

Resumen

Nuestros datos en cada paso de tiempo siguen una distribución Gaussiana con media ν_i y varianza ω_i^2.

Es decir, los log-precios

$$z_i \sim N(\nu_i, \omega_i^2) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

donde N es el número de puntos de datos.

Resumen

Nuestros datos en cada paso de tiempo siguen una distribución Gaussiana con media ν_i y varianza ω_i^2.

Es decir, los log-precios

$$z_i \sim N(\nu_i, \omega_i^2) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

donde N es el número de puntos de datos.

La función de verosimilitud

La función de densidad de probabilidad,

$$f_\theta(z_1, z_2, \ldots, z_N|\theta) = \prod_{i=1}^{N} f(z_i|z_{i-1}, \nu_i, \omega_i^2),$$

como función de θ con todos los z_i conocidos, es la función de verosimilitud $L(\theta)$, es decir,

$$L(\alpha, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_i^2}} \right) e^{-\frac{(z_i-\nu_i)^2}{2\omega_i^2}}.$$

La función de verosimilitud

La función de densidad de probabilidad,

$$f_\theta(z_1, z_2, \ldots, z_N|\theta) = \prod_{i=1}^{N} f(z_i|z_{i-1}, \nu_i, \omega_i^2),$$

como función de θ con todos los z_i conocidos, es la función de verosimilitud $L(\theta)$, es decir,

$$L(\alpha, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_i^2}} \right) e^{-\frac{(z_i-\nu_i)^2}{2\omega_i^2}}.$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Dado que el logaritmo es una función continua estrictamente creciente sobre el rango de la verosimilitud, los valores que maximicen la verosimilitud también maximizarán su logaritmo.

$$\hat{L}(\alpha, \mu, \sigma^2) = \ln L(\alpha, \mu, \sigma^2)$$

$$= -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\ln \omega_i^2}{2} + \frac{(z_i - \nu_i)^2}{2\omega_i^2} \right]$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Dado que el logaritmo es una función continua estrictamente creciente sobre el rango de la verosimilitud, los valores que maximicen la verosimilitud también maximizarán su logaritmo.

$$
\begin{aligned}
\hat{L}(\alpha, \mu, \sigma^2) &= \ln L(\alpha, \mu, \sigma^2) \\
&= -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\ln \omega_i^2}{2} + \frac{(z_i - \nu_i)^2}{2\omega_i^2} \right]
\end{aligned}
$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Para encontrar las ecuaciones de los parámetros que maximizan la función de log-verosimilitud tomamos derivadas parciales con respecto a dos de los parámetros, μ y σ^2, convirtiendo la función de log-verosimilitud en una función de una sola variable, α.

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

$$0 = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(z_i - \nu_i)}{\omega_i^2}(1 - e^{-\alpha t_i})$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{\omega_i^2}(1 - e^{-\alpha t_i}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i}{\omega_i^2}(1 - e^{-\alpha t_i}).$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

$$0 = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(z_i - \nu_i)}{\omega_i^2}(1 - e^{-\alpha t_i})$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{\omega_i^2}(1 - e^{-\alpha t_i}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\nu_i}{\omega_i^2}(1 - e^{-\alpha t_i}).$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Sustituyendo ν_i,

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(1-e^{\alpha t_i})(z_i - z_0 e^{-\alpha t_i})}{\omega_i^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(1-e^{\alpha t_i})^2}{\omega_i^2}}.$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Sustituyendo ω_i^2,

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(z_i - z_0 e^{-\alpha t_i})}{(1 + e^{-\alpha t_i})}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(1 - e^{\alpha t_i})}{(1 + e^{-\alpha t_i})}} = \hat{h}(\alpha).$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} \\
&= -\frac{N}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{2(z_i - \nu_i)\frac{1}{2\alpha}(1 - e^{\alpha t_i})}{\omega_i^2}\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{i=1}^{N} \frac{(z_i - \nu_i)^2 \frac{1}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t_i})}{\omega_i^4}\right]
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(z_i - \nu_i)^2}{(1 - e^{-2\alpha t_i})}}{2\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i - \nu_i}{1 + e^{-\alpha t_i}}\right]}.$$

En términos de $\hat{h}(\alpha)$,

$$\nu_i = z_0 e^{-\alpha t_i} + \hat{h}(\alpha)(1 - e^{-\alpha t_i}) = \hat{g}_i(\alpha).$$

Entonces,

$$\frac{\sigma^2}{2\alpha} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{(z_i - \nu_i)^2}{(1 - e^{-2\alpha t_i})}}{2\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i - \nu_i}{1 + e^{-\alpha t_i}}\right]}.$$

En términos de $\hat{h}(\alpha)$,

$$\nu_i = z_0 e^{-\alpha t_i} + \hat{h}(\alpha)(1 - e^{-\alpha t_i}) = \hat{g}_i(\alpha).$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Usando $\hat{g}_i(\alpha)$ en el álgebra anterior,

$$\hat{K}(\alpha) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{g}(\alpha)^2}{(1 - e^{-2\alpha t_i})}}{2\left[N + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{g}(\alpha)}{(1 + e^{-\alpha t_i})}\right]}.$$

Reescribiendo en términos de las nuevas funciones,

$$\omega_i^2 = \hat{K}(\alpha)\,(1 - e^{-2\alpha t_i}),$$
$$\nu_i = z_0 e^{-\alpha t_i} + \hat{h}(\alpha)\,(1 - e^{-\alpha t_i}).$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Usando $\hat{g}_i(\alpha)$ en el álgebra anterior,

$$\hat{K}(\alpha) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{g}(\alpha)^2}{(1 - e^{-2\alpha t_i})}}{2\left[N + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{g}(\alpha)}{(1 + e^{-\alpha t_i})}\right]}.$$

Reescribiendo en términos de las nuevas funciones,

$$\omega_i^2 = \hat{K}(\alpha)\,(1 - e^{-2\alpha t_i}),$$
$$\nu_i = z_0 e^{-\alpha t_i} + \hat{h}(\alpha)\,(1 - e^{-\alpha t_l}).$$

La función de verosimilitud
(log-verosimilitud)

Obtenemos la función de log-verosimilitud de una sola variable

$$\tilde{L}(\alpha) = -\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\hat{K}(\alpha)\left(1 - e^{-2\alpha t_i}\right)\right)^2 + \frac{\left[z_i - \left(z_0 e^{-\alpha t_i} + \hat{h}(\alpha)\left(1 - e^{-\alpha t_i}\right)\right)\right]^2}{2\left[\hat{K}(\alpha)\left(1 - e^{-2\alpha t_i}\right)\right]^2}.$$

Esquema

1. Modelo para precios spot de energía
   - Características del mercado de energía
   - El modelo inicial
2. Estimación de los parámetros del modelo
   - Regresión por mínimos cuadrados ordinaria (OLSR)
   - Estimación de máxima verosimilitud (MLE)
   - Resultados de la simulación para el modelo inicial
3. Futuros de precios spot
   - Representación cerrada del precio del futuro
   - Simulaciones para precios de futuros

El esquema discretizado

$$dz = \alpha \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha - z} \right) dt + \sigma \, dW$$

$$z_{i+1} - z_i = \alpha \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha - z_i} \right) dt + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_i$$

$$z_{i+1} = \alpha \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) dt (1 - \alpha \, dt)) z_i + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_i$$

Tras simular los log-precios como indica el esquema,

$$P_{i+1} = e^{z_{i+1}}.$$

El esquema discretizado

$$dz = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha - z}\right) dt + \sigma\, dW$$

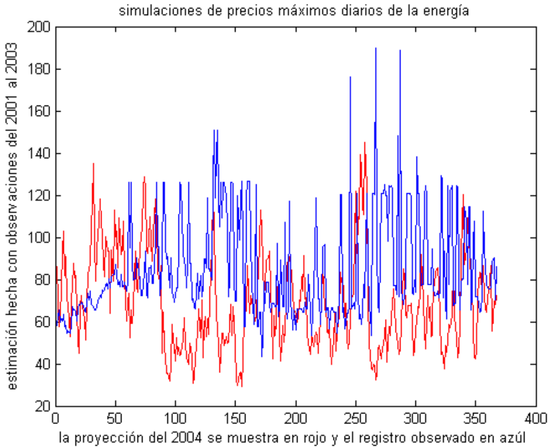
$$z_{i+1} - z_i = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha - z_i}\right) dt + \sigma\sqrt{\Delta t}\phi_i$$

$$z_{i+1} = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) dt(1 - \alpha\, dt))z_i + \sigma\sqrt{\Delta t}\phi_i$$

Tras simular los log-precios como indica el esquema,

$$P_{i+1} = e^{z_{i+1}}.$$

Resultados de la simulación para el modelo inicial
(muestra de datos de un año)



Resultados de la simulación para el modelo inicial

Muestra de datos de un año tomados de Sheikh, 2007.

Parámetro	Reg	MLE
α	158.49	158.49
μ	4.112	4.114
σ^2	118.42	118.41

Esquema

Representación cerrada del precio del futuro

Encontramos el precio en el tiempo t de un futuro con vencimiento T, tomando el valor esperado del precio spot al vencimiento bajo una medida Q-martingala equivalente condicional a la información disponible hasta el tiempo t.

$$F(t,T) = \mathbb{E}_t^Q[P_T|B_t{}^1]$$

Representación cerrada del precio del futuro

$$Y = e^{\alpha t} z_t$$
$$dY = d(e^{\alpha t} z_t) = \alpha e^{\alpha t} z_t + e^{\alpha t}\, dz_t$$

$$dz_t = \alpha\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z_t\right) + \sigma\, dW_t + \ln J\, dN_t$$

Representación cerrada del precio del futuro

$$
\begin{aligned}
Y &= e^{\alpha t} z_t \\
dY &= d(e^{\alpha t} z_t) = \alpha e^{\alpha t} z_t + e^{\alpha t}\, dz_t
\end{aligned}
$$

$$
dz_t = \alpha \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - z_t \right) + \sigma\, dW_t + \ln J\, dN_t
$$

Representación cerrada del precio del futuro

Reemplazando dz_t y simplificando,

$$d(e^{\alpha t} z_t) = \alpha e^{\alpha t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) dt + \sigma e^{\alpha t} \, dW + e^{\alpha t} \ln J \, dN_t .$$

Integrando desde $t \to T$,

$$e^{\alpha T} z_T - e^{\alpha t} z_t = \alpha e^{\alpha t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) dt + \sigma e^{\alpha t} \, dW + e^{\alpha t} \ln J \, dN_t .$$

Representación cerrada del precio del futuro

Reemplazando dz_t y simplificando,

$$d(e^{\alpha t} z_t) = \alpha e^{\alpha t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) dt + \sigma e^{\alpha t}\, dW + e^{\alpha t} \ln J\, dN_t.$$

Integrando desde $t \to T$,

$$e^{\alpha T} z_T - e^{\alpha t} z_t = \alpha e^{\alpha t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) dt + \sigma e^{\alpha t}\, dW + e^{\alpha t} \ln J\, dN_t.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Entonces,

$$z_T = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) + \left(z_t - \mu + \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) e^{-\alpha(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{-\alpha(T-s)}\, dW_s + \int_t^T e^{-\alpha(T-s)} \ln J\, dN_s.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Así,

$$F(t,T) = \mathbb{E}_t[e^{zt}|Bt] = e^{C}\left(\frac{P(t)}{e^{C}}\right)^{e^{-\alpha(T-t)}} \mathbb{E}_t\left[e^{\sigma\int_t^T e^{-\alpha(T-s)}\,dW_s}\Big|B_t\right] \mathbb{E}_t\left[e^{\int_t^T e^{-\alpha(T-s)}\ln J\,dN_s}\Big|B_t\right],$$

donde $C = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$.

Representación cerrada del precio del futuro

En particular, con ayuda de la teoría de probabilidad y el teorema de isometría de Ito,

$$\mathbb{E}_t\left[e^{\sigma\int_t^T e^{-\alpha(T-s)}\,dW_s}\Big|B_t\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T e^{-2\alpha(T-s)}\,ds}$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{4\alpha}\left[1-e^{-2\alpha(T-t)}\right]}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Para simplificar los cálculos, definimos

$$\alpha_s \equiv e^{-\alpha(T-s)} \ln J_s,$$

$$m_t = \int_0^t \alpha_s \, dN_s,$$

$$L_t \equiv e^{m_t}.$$

La segunda ecuación puede reescribirse de manera equivalente como

$$dm_t = \alpha_t \, dN_t.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Para simplificar los cálculos, definimos

$$\alpha_s \equiv e^{-\alpha(T-s)} \ln J_s,$$
$$m_t = \int_0^t \alpha_s \, dN_s,$$
$$L_t \equiv e^{m_t}.$$

La segunda ecuación puede reescribirse de manera equivalente como

$$dm_t = \alpha_t \, dN_t.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Usando el lema de Ito para saltos generalizado,

$$dL_t = \frac{\partial L_t(m_{t-})}{\partial m_t}\, dm_t - \frac{\partial L_t(m_{t-})}{\partial m_t}\,(m_t - m_{t-})\, dN + (L_t - L_{t-})\, dN.$$

Con

$$m_t = m_{t-} + \alpha_t \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial L_t(m_{t-})}{\partial m_t} = L_{t-},$$

reescribimos la expresión para L_t

$$L_t = e^{m_{t-}+\alpha_t} = L_{t-} e^{\alpha t}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Usando el lema de Ito para saltos generalizado,

$$dL_t = \frac{\partial L_t(m_{t^-})}{\partial m_t}\, dm_t - \frac{\partial L_t(m_{t^-})}{\partial m_t}\,(m_t - m_{t^-})\, dN + (L_t - L_{t^-})\, dN.$$

Con

$$m_t = m_{t^-} + \alpha_t \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial L_t(m_{t^-})}{\partial m_t} = L_{t^-},$$

reescribimos la expresión para L_t

$$L_t = e^{m_{t^-}+\alpha_t} = L_{t^-} e^{\alpha_t}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Usando el lema de Ito para saltos generalizado,

$$dL_t = \frac{\partial L_t(m_{t-})}{\partial m_t}\, dm_t - \frac{\partial L_t(m_{t-})}{\partial m_t}\,(m_t - m_{t-})\, dN + (L_t - L_{t-})\, dN.$$

Con

$$m_t = m_{t-} + \alpha_t \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial L_t(m_{t-})}{\partial m_t} = L_{t-},$$

reescribimos la expresión para L_t

$$L_t = e^{m_{t-} + \alpha_t} = L_{t-}\, e^{\alpha t}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Sustituyendo de vuelta las ecuaciones transformadas,

$$\begin{aligned} dL_t &= L_{t-}\alpha_t \, dN_t - L_{t-}(\alpha_t) \, dN_t + (L_{t-} e^{\alpha t} - L_{t-}) \, dN_t \\ &= L_{t-}(e^{\alpha t} - 1) \, dN_t . \end{aligned}$$

Integrando en $[0, t]$, resultado que luego extenderemos a $[t, T]$,

$$\int_0^t (dL_t) = \int_0^t L_{\tau-}(e^{\alpha\tau} - 1) \, dN_\tau .$$

Ya que $L_0 = 1$ por definición, obtenemos

$$L_t = 1 + \int_0^t L_\tau (e^{\alpha\tau} - 1) \, dN_\tau .$$

Representación cerrada del precio del futuro

Sustituyendo de vuelta las ecuaciones transformadas,

$$\begin{aligned} dL_t &= L_{t^-}\alpha_t\, dN_t - L_{t^-}(\alpha_t)\, dN_t + (L_{t^-} e^{\alpha t} - L_{t^-})\, dN_t \\ &= L_{t^-}(e^{\alpha t} - 1)\, dN_t. \end{aligned}$$

Integrando en $[0, t]$, resultado que luego extenderemos a $[t, T]$,

$$\int_0^t (dL_t) = \int_0^t L_{\tau^-}(e^{\alpha\tau} - 1)\, dN_\tau.$$

Ya que $L_0 = 1$ por definición, obtenemos

$$L_t = 1 + \int_0^t L_\tau(e^{\alpha\tau} - 1)\, dN_\tau.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Sustituyendo de vuelta las ecuaciones transformadas,

$$\begin{aligned} dL_t &= L_{t^-}\alpha_t \, dN_t - L_{t^-}(\alpha_t)\, dN_t + (L_{t^-} e^{\alpha t} - L_{t^-})\, dN_t \\ &= L_{t^-}(e^{\alpha t} - 1)\, dN_t . \end{aligned}$$

Integrando en $[0, t]$, resultado que luego extenderemos a $[t, T]$,

$$\int_0^t (dL_t) = \int_0^t L_{\tau^-}(e^{\alpha\tau} - 1)\, dN_\tau .$$

Ya que $L_0 = 1$ por definición, obtenemos

$$L_t = 1 + \int_0^t L_\tau (e^{\alpha\tau} - 1)\, dN_\tau .$$

Representación cerrada del precio del futuro

Como $\mathbb{E}_0[dN_t] = \lambda\, dt$, usando la linealidad de $\mathbb{E}$,

$$\mathbb{E}_0[L_t] = 1 + \int_0^t \mathbb{E}_0[L_\tau]\left(\mathbb{E}_0[(e^{\alpha\tau} - 1)]\right)\, dN_\tau\, \lambda\, d\tau.$$

Haciendo $\mathbb{E}_0[L_t] = \eta_t$,

$$\frac{d\eta_t}{dt} = \eta_t(\mathbb{E}_0[e^{\alpha_t}])\lambda.$$

$$\frac{1}{\eta}\, d\eta = (\mathbb{E}_0[e^{\alpha_t}])\lambda\, dt.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Como $\mathbb{E}_0[dN_t] = \lambda\, dt$, usando la linealidad de $\mathbb{E}$,

$$\mathbb{E}_0[L_t] = 1 + \int_0^t \mathbb{E}_0[L_\tau]\left(\mathbb{E}_0[(e^{\alpha\tau} - 1)]\right)\, dN_\tau\, \lambda\, d\tau.$$

Haciendo $\mathbb{E}_0[L_t] = \eta_t$,

$$\frac{d\eta_t}{dt} = \eta_t(\mathbb{E}_0[e^{\alpha_t}])\lambda.$$

$$\frac{1}{\eta}\, d\eta = (\mathbb{E}_0[e^{\alpha_t}])\lambda\, dt.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Ya que $\eta_0 = 1$ por definición de η_t, integrando,

$$\ln \eta_t - \ln \eta_0 = \int_0^t \mathbb{E}_0[e^{\alpha_\tau}]\lambda \, d\tau,$$

$$\eta_t = e^{\int_0^t (\mathbb{E}_0[e^{\alpha_\tau}]-1)\lambda \, d\tau}.$$

En términos de dN_t,

$$E_0\left[e^{\int_0^t \alpha_\tau \, dN_\tau}\right] = e^{\int_0^t (E_0[e^{\alpha_\tau}])\lambda \, d\tau}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Ya que $\eta_0 = 1$ por definición de η_t, integrando,

$$\ln \eta_t - \ln \eta_0 = \int_0^t \mathbb{E}_0[e^{\alpha_\tau}]\lambda\, d\tau,$$

$$\eta_t = e^{\int_0^t (\mathbb{E}_0[e^{\alpha_\tau}]-1)\lambda\, d\tau}.$$

En términos de dN_t,

$$E_0\left[e^{\int_0^t \alpha_\tau\, dN_\tau}\right] = e^{\int_0^t (E_0[e^{\alpha_\tau}])\lambda\, d\tau}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Para cualquier función integrable en $[0, T]$,

$$\int_t^T f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx,$$

donde $t \in (0, T)$.

Entonces, extendiendo el resultado anterior,

$$E_0\left[e^{\int_t^T \alpha_\tau\, dN_\tau}\right] = e^{\int_t^T (E_0[e^{\alpha_\tau}])\lambda\, d\tau}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Para cualquier función integrable en $[0, T]$,

$$\int_t^T f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx,$$

donde $t \in (0, T)$.

Entonces, extendiendo el resultado anterior,

$$E_0\left[e^{\int_t^T \alpha_\tau\,dN_\tau}\right] = e^{\int_t^T (E_0[e^{\alpha_\tau}])\lambda\,d\tau}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Para evaluar la integral, definimos

$$g(s) = e^{-\alpha(T-s)}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[e^{\alpha_s}\right] &= \mathbb{E}_0\left[e^{g(s)\ln J_s}\right]\\ &= \mathbb{E}_0\left[e^{g(s)\phi_s}\right]\\ &= e^{\mu_J h+\sigma_J^2 h^2}.\end{aligned}$$

Representación cerrada del precio del futuro

Para evaluar la integral, definimos

$$g(s) = e^{-\alpha(T-s)}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\left[e^{\alpha_s}\right] &= \mathbb{E}_0\left[e^{g(s)\ln J_s}\right] \\
&= \mathbb{E}_0\left[e^{g(s)\phi_s}\right] \\
&= e^{\mu_J h + \sigma_J^2 h^2}.
\end{aligned}$$

Representación cerrada del precio del futuro

Reemplazando,

$$\mathbb{E}_t\left[e^{\int_t^T \alpha_s\, dN_s}\right] = e^{\int_t^T \left(e^{\mu g + \frac{\sigma^2}{2} g^2} - 1\right)\lambda\, ds}$$

$$= \frac{e^{\int_t^T \left(e^{\mu g + \frac{\sigma^2}{2} g^2}\right)\lambda\, ds}}{e^{\lambda(T-t)}}.$$

Representación cerrada del precio del futuro

Finalmente,

$$F(t,T) = e^{C}\left(\frac{P(t)}{e^{C}}\right)^{e^{-\alpha(T-t)}} e^{\frac{\sigma^2}{4\alpha}\left[1-e^{-2\alpha(T-t)}\right]+\int_t^T e^{(\mu g+\frac{\sigma^2}{2}g^2)-\lambda(T-t)}}.$$

Esquema

Simulaciones para precios de futuros

Datos de Sheikh, 2007.

T en años	$F(0, T)$
5	44.78
2	48.23
1	49.43
$1/2$	50.05
$1/4$	50.36
1.12	50.57

Referencias I

- A. Etheridge.
  A Course in Financial Calculus.
  Cambridge University Press, 2002.
- T. C. Gard.
  Introduction to Stochastic Differential Equations.
  Dekker, 1988.
- J. C. Hull.
  Options, Futures and Other Derivatives.
  Prentice Hall, 2006.
- R. S. Pindyck and D. L. Rubinfeld.
  Econometric Models and Economic Forecasts.
  McGraw-Hill, 1998.

Referencias II

- G. Skorohod.
  Stochastic Differential Equations.
  Springer-Verlag, 1972.

- A. Cartea and M. G. Figueroa
  Pricing in electricity markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality.
  Applied Mathematical Finance, 12:313–335, 2005.

- M. Davison, C. L. Marcus, and B. Anderson.
  Development of a hybrid model for electrical power spot prices.
  IEEE Transactions on Power Systems, 17:257–264, 2002.

Referencias III

A. Lari-Lavassani, A. A. Sadeghi, and A. Ware.
Mean reverting models for energy option pricing.
Reporte técnico, Universidad de Calgary, 2001.

S. M. Sheikh.
Modeling energy spot market and pricing energy derivatives: a technical analysis.
Tesis de maestría, Universidad de Pittsburgh, 2007.