

# Análisis de problemas variacionales en mecánica cuántica mediante técnicas de optimización no lineal

Rene J. Meziat, Diego A. Patiño

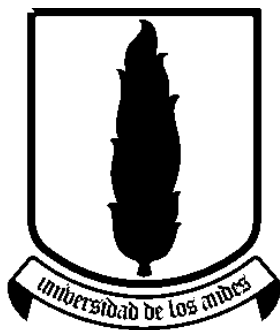


Universidad de los Andes.  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas  
Bogotá  
2005

# Análisis de problemas variacionales en mecánica cuántica mediante técnicas de optimización no lineal

Rene J. Meziat, Diego A. Patiño

Proyecto de Investigación Número 1810 de la Fundación para la  
Promoción de la Investigación y la Tecnología-Banco de la República



Universidad de los Andes  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas  
Bogotá  
2005

# Tabla de Contenido

<b>Contenido</b>	<b>I</b>
<b>Presentación</b>	<b>VII</b>
0.1. Agradecimientos . . . . .	IX
<b>1. Análisis Matemático del Problema</b>	<b>1</b>
1.1. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana . . . . .	1
1.2. Extensiones de la Mecánica Cuántica . . . . .	5
1.3. Análisis Numérico del Problema . . . . .	11
<b>2. Electrodinámica</b>	<b>15</b>
2.1. Preliminares . . . . .	15
2.2. Convexificación . . . . .	16
2.3. Interacciones electromagnéticas . . . . .	18
2.4. Lagrangiano de Darwin . . . . .	19
2.5. Oscilaciones en dinámica no lineal . . . . .	21
2.5.1. Atracción . . . . .	21
2.5.2. Repulsión . . . . .	27
2.6. Análisis de la interacción relativista de dos partículas cargadas . . . . .	32
2.7. Lagrangiano sin relatividad . . . . .	34
2.8. Análisis de convexidad . . . . .	36
2.9. Relajación . . . . .	37
2.10. Lagrangiano con relatividad . . . . .	38
2.11. Resultados . . . . .	41
2.11.1. Prueba 1 . . . . .	41
2.11.2. Prueba 2 . . . . .	42

2.11.3. Prueba 3 . . . . .	43
2.11.4. Prueba 4 . . . . .	44
2.11.5. Prueba 5 . . . . .	45
<b>3. Potenciales en Redes Cristalinas</b>	<b>47</b>
3.1. Envolturas bidimensionales . . . . .	48
3.1.1. Ejemplo . . . . .	51
3.2. Construcción de la medida . . . . .	52
3.3. Análisis por elementos finitos . . . . .	55
3.3.1. 16 elementos de malla . . . . .	57
3.3.2. 36 elementos de malla . . . . .	60
3.3.3. Generalización . . . . .	64
3.4. Ejemplos . . . . .	66
3.4.1. Ejemplo 1 . . . . .	66
3.4.2. Ejemplo 2 . . . . .	71
3.4.3. Ejemplo 3 . . . . .	76
3.4.4. Ejemplo 4 . . . . .	80
3.4.5. Ejemplo 5 . . . . .	85
3.4.6. Ejemplo 6 . . . . .	90
3.4.7. Ejemplo 7 . . . . .	94
3.4.8. Ejemplo 8 . . . . .	98
3.4.9. Ejemplo 9 . . . . .	101
3.4.10. Ejemplo 10 . . . . .	105
<b>4. Conclusiones</b>	<b>119</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>121</b>
<b>A. Lenguaje AMPL</b>	<b>124</b>
A.0.11. Ejemplo 2 . . . . .	127
A.0.12. Ejemplo 3: Interacción entre partículas . . . . .	128
<b>B. Herramienta GAMS</b>	<b>133</b>
B.0.13. Ejemplo 1 . . . . .	135

<b>C. Solucionador KNITRO</b>	<b>137</b>
C.0.14. Ejemplo . . . . .	139
<b>D. El concepto de cluster</b>	<b>143</b>
D.0.15. Características de un cluster . . . . .	144
D.0.16. Elementos de un cluster . . . . .	145

# Lista de Figuras

2.1. Oscilaciones de la posición . . . . .	25
2.2. Oscilaciones $x(t)$ para $\alpha = 1$ y $\beta = -2$ . . . . .	27
2.3. Oscilaciones $x(t)$ para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ . . . . .	28
2.4. Oscilaciones $x(t)$ para $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0,2$ . . . . .	29
2.5. Oscilaciones $x(t)$ para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ . . . . .	30
2.6. Oscilaciones $x(t)$ para $\alpha = 1$ y $\beta = -1$ . . . . .	32
2.7. Superficie (2.40) . . . . .	32
2.8. Envoltura convexa de (2.40) . . . . .	33
2.9. Curvas de nivel . . . . .	34
2.10. Mínimos globales para $\alpha = 52$ . . . . .	34
2.11. Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación) . . . . .	42
2.12. Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación) . . . . .	43
2.13. Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación) . . . . .	44
2.14. Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación) . . . . .	45
2.15. Trayectorias de las partículas (Efecto de la relatividad en un caso par- ticular) . . . . .	46
3.1. Estructura de elementos básicos . . . . .	56
3.2. Estructura de elementos básicos de $2 \times 2$ . . . . .	57
3.3. Elemento básico . . . . .	58
3.4. Gradientes de los elementos . . . . .	59
3.5. Estructura de 36 elementos . . . . .	61

3.6. Gradientes de los 36 elementos . . . . .	63
3.7. Estructura de $m \times m$ elementos . . . . .	65
3.8. Numeración de los elementos . . . . .	65
3.9. Malla para una distribución de elementos de $10 \times 10$ . . . . .	118
3.10. Solución $u^*$ para una malla de $10 \times 10$ . . . . .	118
D.1. Conexión en estrella . . . . .	146
D.2. Elementos de un cluster . . . . .	146
D.3. Estación de trabajo W2100z . . . . .	148
D.4. Parte frontal del servidor . . . . .	149
D.5. Parte posterior del servidor . . . . .	149

# Lista de Tablas

2.1. Tabla de medidas $\mu(t_i)$ . . . . .	26
2.2. Tabla de medidas $\mu(t_i)$ . . . . .	27
2.3. Tabla de medidas $\mu(t_i)$ . . . . .	29
2.4. Tabla de medidas $\mu(t_i)$ . . . . .	30
2.5. Tabla de medidas $\mu(t_i)$ . . . . .	31
3.1. Medida para el polinomio (3.68) cuando $h = 0$ , $g = 0$ y $m = 3$ . . . . .	67
3.2. Medida para el polinomio (3.68) cuando $h = 0$ , $g = 0$ y $m = 5$ . . . . .	68
3.3. medida para polinomio(3.68) cuando $h = x + y$ , $g = 0$ y $m = 3$ . . . . .	71
3.4. medida para polinomio(3.68) cuando $h = x + y$ , $g = 0$ y $m = 5$ . . . . .	73
3.5. medida para polinomio(3.68) cuando $h = 0$ , $g = x + y$ y $m = 3$ . . . . .	76
3.6. medida para polinomio(3.68) cuando $h = 0$ , $g = x + y$ y $m = 5$ . . . . .	77
3.7. medida para polinomio(3.68) cuando $h = x + y$ , $g = x + y$ y $m = 3$ . . . . .	81
3.8. medida para polinomio(3.68) cuando $h = x + y$ , $g = x + y$ y $m = 5$ . . . . .	82
3.9. medida para polinomio(3.68) cuando $h = 0$ , $g = 1$ y $m = 3$ . . . . .	85
3.10. medida para polinomio(3.68) cuando $h = 0$ , $g = 1$ y $m = 5$ . . . . .	87
3.11. medida para polinomio(3.68) cuando $h = x + y$ , $g = 1$ y $m = 3$ . . . . .	90
3.12. medida para polinomio(3.68) cuando $h = x + y$ , $g = 1$ y $m = 5$ . . . . .	91
3.13. medida para polinomio(3.69) cuando $h = 0$ , $g = 0$ y $m = 5$ . . . . .	95
3.14. medida para polinomio(3.69) cuando $h = \sqrt{3}x/2 + y/2$ , $g = \sqrt{3}x/2 + y/2$ y $N = 5$ . . . . .	98
3.15. medida para polinomio(3.69) cuando $h = 0$ , $g = 1$ y $m = 5$ . . . . .	101
3.16. medida para polinomio(3.72) . . . . .	105
A.1. Palabras reservadas más comunes . . . . .	126
B.1. Algunas palabras reservadas de GAMS . . . . .	135



# Presentación

En este trabajo abordaremos el tratamiento matemático y el análisis numérico de sistemas mecánicos en electrodinámica y dinámica no lineal. Emplearemos un lenguaje común de cálculo de variaciones que se ajusta a situaciones especiales de dinámica no lineal, en especial aquellos casos en que aparecen términos no convexos en el Lagrangiano o en la formulación Hamiltoniana del sistema mecánico en cuestión. Aunque estas situaciones no son frecuentes, existen situaciones lo suficientemente relevantes en electrodinámica y mecánica de medios continuos que justifican este enfoque.

Es primordial en este trabajo el uso de medidas de probabilidad parametrizadas, también llamadas medidas de Young, como una herramienta analítica que permite extender la interpretación probabilista de Bohr a las variables de momentos y las velocidades generalizadas. De esta manera ellas brindan un puente entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, a través de un lenguaje común para la representación Lagrangiana y la representación Hamiltoniana de un sistema mecánico.

Es otro pilar de la presente propuesta el uso de técnicas de optimización global, descritas mediante los momentos de expresiones polinomiales no convexas, para desarrollar el análisis numérico y el cálculo efectivo de problemas variacionales generalizados, que aparecen en aquellas situaciones donde la energía cinética se expresa a través de expresiones altamente no lineales, en especial aquellas que tienen forma no convexa en las variables que corresponden a velocidades o momentos generalizados. Este enfoque permite obtener numéricamente las distribuciones de probabilidad parametrizadas que dan lugar a una interpretación probabilista (tipo Bohr) del comportamiento de los momentos y las velocidades de un sistema mecánico.

Finalmente destacamos la generalidad de nuestra propuesta en el sentido de que permite incorporar esquemas de aproximación muy diversos, que pueden comprender desde bases exponenciales propias del análisis de Fourier, así como bases de aproximación

local como las empleadas en el método de elemento finito. Desde este punto de vista este trabajo incluye un aporte importante al análisis numérico de problemas generales en mecánica no lineal.

Nuestro trabajo se divide en tres capítulos centrales. En el primero se hace una exposición general de la teoría y los métodos empleados. En especial se dedica al papel de las medidas de Young y los principios variacionales generalizados como una herramienta teórica unificadora en mecánica no lineal. También se desarrolla en este capítulo la técnica de relajación y el uso de momentos para problemas de optimización no lineal, en especial sobre los problemas variacionales propios de la mecánica clásica y la mecánica cuántica. También se expone en el primer capítulo la forma como podemos emplear diferentes esquemas de aproximación funcional dentro de nuestro análisis.

El segundo capítulo se dedica exclusivamente a la aplicación del método sobre problemas de electrodinámica que incluyen términos relativistas en su energía cinética. Mediante análisis de Fourier y optimización global conseguimos un modelo computacional que puede resolverse mediante técnicas específicas de programación convexa. Presentamos algunos resultados concretos.

En el tercer capítulo presentamos la forma específica como el método puede acoger una base de interpolación local, en este caso una base de splines de primer orden sobre mallas de elementos finitos. De esta manera mostramos cómo el análisis propuesto y su implementación numérica puede extenderse a una gran gama de aplicaciones, en especial aquellas ligadas con redes cristalinas que pueden dar lugar a diferentes pozos de potencial en la energía de deformación del cristal.

Los apéndices dan una breve descripción de las técnicas numéricas y los equipos de cómputo que hemos empleado. Esto es relevante para aquellos lectores interesados en computación científica de altas prestaciones.

## **0.1. Agradecimientos**

Esta investigación ha sido posible gracias al apoyo de las siguientes personas e instituciones.

Dr. Eugenio Oñate, Centro Internacional de Métodos Numéricos, Barcelona.

Dr. Tomas Roubicek, Universidad Carlos IV, Praga.

Dr. Pablo Pedregal, Universidad de Castilla-La Mancha

Dr. Ernesto Aranda, Universidad de Castilla-La Mancha

Fundación para la Promoción de la Investigación y la Tecnología.

Sun Microsystems.

Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes.

Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes.

# Capítulo 1

## Análisis Matemático del Problema

En este capítulo presentamos los fundamentos matemáticos que, acorde a los principios de la mecánica analítica y la mecánica cuántica, soportan nuestra propuesta. También presentaremos el análisis que sustenta los métodos numéricos y sus algoritmos para abordar diversos problemas.

### 1.1. Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana

Cuando nos enfrentamos al análisis de un sistema mecánico en el sentido clásico, podemos utilizar dos enfoques equivalentes, uno empleando coordenadas y velocidades generalizadas que dan lugar a la función Lagrangiana, otro utilizando coordenadas y momentos generalizados que dan lugar a la función Hamiltoniana, o Hamiltoniano del problema. Como veremos ambas descripciones son equivalentes.

Para describir el estado de movimiento de un sistema mecánico necesitamos un conjunto de coordenadas que tomaremos aquí en un vector  $q = (q_1, \dots, q_n)$ , cuya dimensión  $n$  corresponde a los grados de libertad de nuestro sistema. Las derivadas de las coordenadas,  $\frac{dq}{dt} = \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  se denominan velocidades generalizadas. Para determinar la dinámica de nuestro sistema debemos conocer la evolución temporal de las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas.

Para conseguir este objetivo tomamos el Lagrangiano del sistema, definido como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema, es decir  $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q)$ . Con esta cantidad utilizamos el Principio de Hamilton (Acción Mínima) según el cual la evolución de  $q$  y  $\dot{q}$  está dada por aquella función derivable  $q(t)$  que

consiga el mínimo valor para la integral (acción) :

$$I(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (1.1)$$

bajo las condiciones iniciales apropiadas, es decir  $q(0) = q^0$  y  $\dot{q}(0) = \dot{q}^0$ .

En una gran cantidad de situaciones, podemos utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, como condiciones de primer orden para el correspondiente problema variacional:

$$\min_q \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad s.a. \quad q(0) = q^0 \quad \dot{q}(0) = \dot{q}^0. \quad (1.2)$$

Así encontramos que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.3)$$

para  $i = 1, \dots, n$ , bajo las condiciones iniciales apropiadas, determina la evolución del sistema mecánico correspondiente entre los instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ .

Este enfoque es lo suficientemente general para conseguir la solución analítica y numérica de muchos casos de interés a través de la integración temporal de sus correspondientes ecuaciones de Euler Lagrange. Sin embargo, a pesar de su enorme generalidad, debemos resaltar algunas dificultades esenciales.

En primer lugar éste es un enfoque clásico, el cual debe adaptarse a situaciones cuánticas y relativistas de una manera apropiada. En segundo lugar, desde el punto de vista del análisis matemático del principio de Hamilton (1.2) que lo rige, debemos resaltar que tan sólo en principios variacionales con funcionales convexos, las ecuaciones de Euler-Lagrange realmente caracterizan los extremos del funcional.

A través del desarrollo teórico del Cálculo de Variaciones que ha tenido lugar a lo largo del siglo XX, sabemos que un funcional como la integral  $I$  en (1.1) no siempre tiene minimizadores en espacios de funciones apropiados, como espacios de Sobolev o espacios de funciones de variación acotada. Recordemos que el principio variacional (1.2) es un problema de optimización que debe estar adecuadamente enmarcado en un conjunto factible, que en el caso de los problemas variacionales discutidos, resulta ser un espacio de funciones.

Hoy sabemos que una condición primordial para que un problema variacional tenga solución, llamadas minimizadores, es que el funcional que lo define  $I$  sea inferiormente semicontinuo. Pero esto requiere que la forma en que el Lagrangiano  $L(q, \dot{q})$  depende

de las velocidades generalizadas  $\dot{q}$  sea una función convexa. Ver [Buttazo, ]. Como veremos, hay casos de gran interés en que esta condición no se cumple, lo cual nos impide tomar las ecuaciones de Euler-Lagrange como la vía correcta para encontrar minimizadores del principio variacional.

En tercer lugar, si abandonamos la idea de integrar las ecuaciones de Euler-Lagrange, debemos afrontar directamente el principio variacional (1.2) como un problema de optimización en sí mismo. Esto implica dos dificultades importantes. Una, la carencia de forma convexa en el funcional, lo cual tiene implicaciones delicadas para el análisis y los métodos numéricos apropiados para problemas de optimización. Dos, que no tenemos ninguna certeza de que existan minimizadores, lo cual nos impide iniciar ningún tipo de análisis o cálculo numérico, porque desde un comienzo sabemos que nuestro problema carece de solución. Entonces: ¿qué podríamos calcular?.

Esta es una dificultad esencial que abordaremos en este trabajo y que intentaremos aclarar con nuestra propuesta. Es así como propondremos métodos analíticos y computacionales para superar este tipo de dificultades en casos de interés.

Una vez hemos comprendido el papel de la función Lagrangiana en el análisis de un sistema mecánico, introducimos unas nuevas variables  $p = (p_1, \dots, p_n)$  llamadas momentos generalizados. Cada momento generalizado está definido como:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Si podemos expresar la energía cinética y potencial del sistema en términos de sus coordenadas y sus momentos generalizados, entonces introducimos una cantidad llamada Hamiltoniano:  $H = H(q, p)$ , que corresponde a la suma de la energía cinética con la energía potencial del sistema mecánico:  $H = K(p) + V(q)$ . Notando que la energía cinética del sistema se puede expresar como  $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i$ , entonces tenemos que el Lagrangiano y el Hamiltoniano están relacionados como:  $H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$ . Con esta relación encontramos fácilmente las ecuaciones de Hamilton que rigen la dinámica del sistema, ellas son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.4)$$

Resaltamos que las ecuaciones de Euler-Lagrange en (1.3) son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton en (1.4). Si integramos (1.4), obtenemos las coordenadas  $q$  y los momentos generalizados  $p$ ; si integramos (1.3) obtenemos las coordenadas generalizadas  $q$  y las velocidades generalizadas  $\dot{q}$  del sistema. Depende de las particularidades de la situación que estemos estudiando, que nos acojamos a una descripción Lagrangiana o

a una descripción Hamiltoniana del sistema.

Es importante resaltar que en ambos casos, el procedimiento matemático implica una integración temporal de sistemas dinámicos usualmente no lineales. Esto conlleva dificultades analíticas y numéricas de diferentes órdenes. Por ejemplo, el estudio de la estabilidad y los puntos de equilibrio del sistema puede ser muy difícil de obtener, su integración numérica puede ser muy delicada si se presentan situaciones como bifurcaciones, atractores con geometrías extrañas o transiciones al caos. Aunque hay herramientas analíticas y computacionales para enfrentar estas situaciones, en una familia general de casos no hay resultados concluyentes. Tome por ejemplo el problema de los tres cuerpos.

Para superar las dificultades intrínsecas de la integración de sistemas dinámicos no lineales, recientemente ha habido un cambio de enfoque impulsado por la comunidad de optimización numérica. La idea es volver sobre el principio variacional subyacente a un sistema mecánico, en este caso el Principio de Hamilton, para aplicar directamente sobre él las herramientas de optimización numérica para programas no lineales.

Este enfoque consiste en tomar el problema variacional (1.2) y tratarlo desde su propio fundamento como un problema de optimización. Este enfoque está compuesto por dos pasos, uno encontrar las herramientas de interpolación adecuadas para aproximarnos a las funciones admisibles del problema. Esto se hace a través de una base clásica de funciones (polinomios de Hermite, Legendre, splines, Gaussianas, exponenciales o funciones trigonométricas, etc.). El segundo paso consiste en la solución numérica del problema de optimización correspondiente, llamados usualmente programas matemáticos. En este trabajo trataremos ambos puntos para los problemas que nos conciernen.

Es necesario comentar que las herramientas de optimización numérica apropiadas para resolver programas matemáticos no lineales con el número de grados de libertad necesarios para modelar sistemas mecánicos, no ha sido posible sino hasta la década de los años 90. Por esta razón la comunidad científica tiene por un hecho cumplido que la forma rigurosa de acercarse a un problema mecánico es a través de la integración de las Ecuaciones de Euler-Lagrange o en su defecto las ecuaciones de Hamilton. En este trabajo no seguiremos este enfoque sino que emplearemos las herramientas disponibles para optimización no lineal como se describe en los apéndices correspondientes.

Por último es indispensable hacer notar que no solamente nos ocuparemos de la solución numérica de un principio variacional visto como un problema de optimización, sino

que nos ocuparemos del tratamiento analítico y numérico de aquellos casos en que se registran lagrangianos con dependencia no convexa de las velocidades generalizadas, porque es justamente esta la situación en que no tenemos métodos ni referencias previas.

## 1.2. Extensiones de la Mecánica Cuántica

En esta sección describiremos el objetivo central de nuestra propuesta como una generalización de métodos y técnicas empleadas en mecánica cuántica.

Para empezar sentemos como base la equivalencia entre la formulación Lagrangiana y la formulación Hamiltoniana en sistemas mecánicos clásicos como lo hemos hecho en el apartado anterior. Es bien conocido que en mecánica cuántica introducimos la noción de operadores y luego empleamos el Hamiltoniano de nuestro sistema para trabajar con principios variacionales que dan lugar en sí mismos a métodos de aproximación tipo Ritz, Rayleigh o Galerkin. Además de permitirnos obtener la ecuación de Schrodinger que describe la función de onda del sistema en sus estados estacionarios. Hacemos notar que la ecuación de Schrodinger es una condición de primer orden para el principio variacional que rige el sistema mecánico cuántico, este es:

$$\min_{\psi} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \quad (1.5)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema (en el sentido de operadores para la mecánica cuántica) y  $\psi$  las funciones entre las que buscaremos la función de onda del sistema. En el tratamiento subsecuente supondremos que  $\psi$  es real y está normalizada, es decir:  $\langle \psi, \psi \rangle = 1$ .

En este planteamiento destacamos el uso de la formulación Hamiltoniana del sistema, destacamos el principio variacional (1.5) que lo rige y destacamos el papel de la función de onda que consigue el mínimo en este planteamiento. Es decir, si  $\psi^*$  consigue ser un minimizador para (1.5), entonces  $\psi^*(q)^2 dq$  proporciona la medida de Bohr  $dB$  que podemos interpretar como la distribución de probabilidad de los estados cuánticos  $q$  que posiblemente tomará el sistema.

Sabemos que cuando la energía potencial  $V$  del sistema presenta varios pozos (valles) energéticos, aparecen estados ligados que se reflejan en la forma general de la medida de Bohr  $dB$ . Esto da lugar a fenómenos de oscilación o saltos entre estados ligados como los que se observan en la molécula de amoníaco.



Desde un punto de vista matemático, esta dualidad en los estados ligados aparece porque la medida de Bohr procede de la solución de un principio de optimización que incorpora potenciales no convexos. Recientemente se ha comprobado que las medidas de probabilidad son un escenario apropiado para proponer relajaciones de problemas de optimización no convexos. Específicamente, las medidas de probabilidad que generalizan un problema de optimización no convexo resultan estar soportadas en los mínimos globales del problema.

Sin entrar en tecnicismos, considere un potencial con dos pozos, como es usual en el modelo para el amoniaco:  $V(q) = (1 - q^2)^2$ . Dejando de lado el efecto de la energía cinética: el potencial  $V$  tiene dos mínimos en los puntos  $q = \pm 1$ . Una forma de encontrar estos puntos es a través de un problema variacional en medidas muy sencillo como el siguiente: ¿Cuál es la medida de probabilidad  $B$  tal que la integral  $\int V(B)dB$  es mínima?. La respuesta está dada por cualquier medida que tenga soporte en los puntos  $q = \pm 1$  que logran el mínimo en  $V$ . Esta es la razón de la aparición de los estados ligados en la molécula del amoniaco, la medida de Bohr para este problema debe tener en cuenta los dos pozos de mínima energía potencial.

A partir de aquí la pregunta natural es: ¿por qué no utilizamos usualmente esta técnica de optimización en medidas para atacar los problemas de mecánica cuántica?. La razón proviene nuevamente del principio variacional (1.5) que la rige. Vamos a deternos un poco sobre él.

Como ya hemos visto, para estudiar el comportamiento cuántico de un sistema mecánico, utilizamos su Hamiltoniano  $H = K + V$  donde  $K$  es la energía cinética y  $V$  su energía potencial. En general, la energía cinética depende de los momentos generalizados del sistema, por ejemplo:  $K = K(p) = \frac{1}{2m}p^2$ , pero cuando consideramos el operador momentum  $p = i\hbar \frac{d}{dx}$  obtenemos  $H = \frac{-(\hbar)^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V$  que da lugar al principio variacional:

$$\min_{\psi} \int \left\{ \frac{(\hbar)^2}{2m} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 + V(x)\psi(x)^2 \right\} dx \quad s.a. \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1 \quad (1.6)$$

el cual se puede escribir en forma muy conveniente como:

$$\min_{\psi} \int W(x, \psi'(x)) + G(x, \psi(x)) dx \quad s.a. \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1 \quad (1.7)$$

el cual es un principio variacional con dependencia convexa en  $\psi'$ , por lo tanto posee minimizadores  $\psi^*$  que dan lugar a la medida de Bohr  $dB = \psi^*(x)^2 dx$ . Por otra parte,

una condición de primer orden para este problema variacional da lugar a la ecuación de Schrodinger  $H\psi = \epsilon\psi$ . Por la naturaleza convexa de  $W$ , podemos aceptar que las soluciones a la ecuación de Schrodinger son realmente minimizadores del principio variacional subyacente. De la misma forma que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange son soluciones cuando el Lagrangiano correspondiente es convexo en las velocidades  $\dot{q}$ . Esto explica por qué las cosas funcionan bien en la gran cantidad de casos en que la energía cinética para el Hamiltoniano procede de un operador diferencial cuadrático.

Aquí nos ocuparemos de presentar y justificar aquellas situaciones en que esto no sucede, es decir aquellas situaciones en que la función Hamiltoniana da lugar a un principio variacional (1.7) donde  $W$  no es una función convexa de  $\psi'$ . Presentaremos su análisis matemático y propondremos métodos numéricos para superarlos. Es en este escenario en que extenderemos los principios de la mecánica cuántica.

Propondremos aquí un papel simétrico entre coordenadas  $q$  y momentos  $p$  como es propio del enfoque Hamiltoniano. Desde este punto de vista podemos presentar el problema variacional (1.7) de la siguiente forma:

$$\min_{\psi} J_1(\phi) + J_2(\psi) \quad s.a. \quad \phi = \frac{d\psi}{dx} \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1 \quad (1.8)$$

donde  $J_i$  representan funcionales integrales y como argumento auxiliar introducimos una función  $\phi$  ligada con  $\psi$  mediante una operación de derivación. Observe que el principio variacional (1.8) incluye al principio variacional (1.7) como un caso particular. Es importante notar que en el caso en que la formulación (1.8) se reduce al caso (1.7), obtenemos la medida de Bohr del sistema a partir de  $(\psi^*)^2$  porque la convexidad de la función  $W$  garantiza la existencia de minimizadores en una gama muy amplia de casos generales. Además la misma convexidad del problema garantiza que tales minimizadores pueden ser estimados a través de las correspondientes ecuaciones de Schrodinger.

Veremos ahora que podemos extender la formulación (1.8) de manera que nos permita obtener una medida que represente adecuadamente el momento  $p$  del sistema, en la misma forma que la medida de Bohr  $B$  nos permite representar las coordenadas  $x$  del sistema.

Recordemos que la coordenada  $x$  vista como operador cuántico se reduce a una multiplicación por  $x$ , el cual es un efecto global que naturalmente depende de la coordenada

$x$ . Sin embargo, el operador momento  $p$ , visto como un operador cuántico conlleva una operación de derivación, el cual es un efecto local que depende de cada valor de la coordenada  $x$ . Es decir:  $p\psi(x) = i\hbar\psi'(x)$ . De manera que no podemos esperar que sea representado por una distribución de probabilidad global, como es el caso de la distribución de Bohr en la coordenada  $x$ . Necesitaremos una familia parametrizada de distribuciones de probabilidad:  $\mu_x$  para cada valor de la coordenada  $x$ , donde  $\mu_x$  representa el efecto del operador  $\frac{p}{i\hbar}$ . De esta manera, asignamos a la medida parametrizada  $\mu_x$  la representación del operador momento a través de la operación integración en  $\mu_x$ , esto es:

$$\frac{p}{i\hbar} = \int d\nu \quad (1.9)$$

donde  $\nu = \{\mu_x : x \in R_x\}$  es una familia de medidas parametrizadas en  $x$  denominadas medidas de Young. Su efecto como operadores locales toma la siguiente forma:

$$\frac{p}{i\hbar}\psi(x) = \psi'(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda) \quad (1.10)$$

para cada valor de la coordenada  $x$ .

La interpretación que le damos a cada medida parametrizada  $\mu_x$  es la misma que usamos para la medida de Bohr, pero aplicada sobre el momento  $p$ , entendido éste como un operador local de derivación.

Las medidas de Young y las medidas parametrizadas fueron introducidas en los años 70 para describir regímenes oscilantes en problemas de control no lineal. Hoy se les emplea en problemas de equilibrio en termodinámica y elasticidad no lineal para describir coexistencias de fases. En análisis matemático son una herramienta apropiada para describir convergencias débiles en espacios funcionales. Según la información que disponemos, no tenemos constancia de que previamente se las haya llevado al campo de la mecánica cuántica. No obstante, por los argumentos expuestos ellas aparecen como una herramienta natural para describir situaciones no convexas para la energía cinética dentro del Hamiltoniano de un sistema. Puesto que esta situación es bastante atípica, tal vez esto explique la razón de que no se encuentren en la literatura especializada como una herramienta estándar en mecánica cuántica. Este es el corazón de nuestra propuesta. Vea las referencias [Pedregal, 1997], [Roubicek, 1997] y [Young, 1969] para una mejor comprensión de las medidas de Young y su papel en optimización no lineal

y física matemática.

Una vez hemos entendido el papel de las medidas parametrizadas  $\mu_x$ , debemos incluirlas en el modelo (1.8), de esta manera nos ocuparemos de un problema variacional generalizado (llamado así porque está definido en términos de medidas de Young) que toma la forma general

$$\min_{\nu} J_1(\nu) + J_2(\psi) \quad s.a. \quad \psi' = \int d\nu \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1 \quad (1.11)$$

la cual se reduce al problema variacional generalizado

$$\min_{\nu} \int \int W(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) + G(x, \psi(x)) dx \quad s.a. \quad \psi'(x) = \int \lambda d\mu_x(\lambda) \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1. \quad (1.12)$$

Es fácil observar que el problema variacional (1.12) tiene estructura lineal en las medidas parametrizadas  $\mu_x$ , por esta razón siempre admite minimizadores bajo condiciones muy generales que se refieren a la coercividad de  $W(x, \lambda)$  en  $\lambda$ . Los minimizadores correspondientes  $\mu_x^*$  representan diferentes estados posibles del momento  $p$  cuando actúa sobre el punto  $x$ .

Puesto que  $\mu_x$  es una distribución de probabilidad, tomaremos  $E_x$  como el operador valor esperado respecto a tal distribución. De esta manera

$$\int W(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) = E_x(W(x, .)) \quad y \quad \int \lambda d\mu_x(\lambda) = E_x(id) \quad (1.13)$$

donde  $id$  es la función identidad.

Con esta notación, el problema variacional generalizado (1.12) toma la forma:

$$\min_{\nu} \int E_x(W(x, .)) + G(x, \psi(x)) dx \quad s.a. \quad \psi'(x) = E_x(id) \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1. \quad (1.14)$$

Debemos probar que el problema generalizado incluye también los casos bien conocidos en los cuales  $W(x, \lambda)$  es una función convexa en  $\lambda$ . Para ello basta ver que si  $W$  es convexa en  $\lambda$  tenemos que:  $E_x(W(x, .)) = W(x, \lambda_x)$  cuando  $\mu_x = \delta_{\lambda_x}$  siendo  $\lambda_x$  el mínimo para  $W(x, .)$ . De esta manera, en los casos generales y bien documentados en la literatura en los cuales  $W$  es convexa, el problema variacional generalizado se transforma en el principio variacional generalmente aceptado de la mecánica cuántica descrito en (1.7). Es importante notar que nuestro modelo variacional generalizado

(1.14) también proporciona la medida de Bohr que rige la distribución del sistema entre los estados ligados y estacionarios respecto a la coordenada  $x$ . Basta con observar que este modelo proporciona también una función de onda  $\psi^*$ .

La pregunta natural que sigue es: ¿cómo resolver un problema variacional dado en la forma (1.14)? En este trabajo, completamos la propuesta teórica descrita en este capítulo con una propuesta de análisis numérico basada en técnicas de teoría de la aproximación y herramientas de optimización global. En el siguiente apartado exponemos el tratamiento numérico del problema. En los capítulos posteriores desarrollaremos aplicaciones concretas en problemas de interés.

Para finalizar comentaremos en qué sentido es posible volver al planteamiento Lagrangiano de un sistema mecánico. Al observar el principio variacional generalizado (1.14), notamos que incluye un funcional generalizado en términos de medidas parametrizadas, ligado con la energía cinética del problema. Este es la expresión

$$E_x(W(x, .))$$

dentro del funcional. El siguiente término consiste en la adición de un término correspondiente a la energía potencial del sistema, este es:  $G(x, \psi(x))$ , pero notamos que éste es exactamente igual a la expresión que se utiliza en el principio variacional (1.7) que dá lugar a los métodos variacionales y la ecuación de Schrodinger en mecánica cuántica. Desde este punto de vista: ¿qué podemos recuperar para la formulación clásica Lagrangiana descrita en (1.2)?

Basta con que llevemos la forma generalizada de la energía cinética  $E_x(W(x, .))$  a la expresión correspondiente en (1.2) y encontremos la relación clásica entre el momento  $p$  y las coordenadas  $q$ . Puesto que el Lagrangiano se puede expresar como:  $L = K - V$ , podemos encontrar un planteamiento dinámico en términos de medidas parametrizadas en la variable temporal  $t$  como:

$$\min_{\nu} \int_{t_1}^{t_2} \{E_t(K(t, .)) - G(t, q(t))\} dt \quad s.a. \quad \dot{q}(t) = E_t(id) \quad (1.15)$$

donde  $\nu = \{\mu_t : t_1 \leq t \leq t_2\}$  es una medida de Young parametrizada por los valores temporales  $t$  entre el intervalo de integración apropiado. Es importante notar que el problema variacional (1.15) incluye al Principio de Hamilton (1.2) cuando la expresión en la energía cinética  $K$  es una función convexa de las velocidades generalizadas. Como esto es así en una gran gama de casos generales, no hay al parecer necesidad de utilizar

el principio variacional generalizado (1.15). Más adelante veremos que en situaciones propias de la dinámica relativista de partículas cargadas se presentan expresiones no convexas para la energía cinética  $K$ . Es así como proponemos que el modelo generalizado (1.15), es el enfoque más apropiado para representar ciertas condiciones no lineales en electrodinámica.

Finalmente debemos resaltar que una familia de principios variacionales generalizados dada en la forma (1.14), permite extender los principios generales de la mecánica cuántica para incluir medidas de probabilidad en la descripción del operador de momentos, extendiendo así el lenguaje de distribuciones de probabilidad (en el sentido de Bohr) al espacio de momentos del sistema mecánico cuántico. Esta generalización usualmente se consigue empleando análisis de Fourier y utilizando densidades de probabilidad en el espacio de la frecuencia. Creemos que la generalización aquí propuesta abre una vía más útil y más específica para problemas de mecánica no lineal. Por otra parte, esta interpretación admite una extensión a la formulación Lagrangiana de un sistema mecánico general, la cual a su vez puede aplicarse a situaciones clásicas (no cuánticas).

### 1.3. Análisis Numérico del Problema

El método que proponemos consiste en explotar el planteamiento de un problema variacional como un problema de optimización en sí mismo. Esto ha sido desarrollado por numerosos autores desde la década de los 90 en diferentes contextos como control óptimo, geometría diferencial y física matemática. Donde no hay referencias previas es acerca de cómo abordar la solución de principios variacionales generalizados descritos en medidas de Young. Para ello debemos tomar una medida parametrizada  $\mu_x$  y representarla a través de su proyección sobre una base de funciones apropiadas. Esta idea extiende los métodos de Ritz propuestos en cálculo de variaciones desde las primeras décadas del siglo XX, pero en un contexto bastante particular.

Si tenemos una base de funciones  $\{g_1, \dots, g_k\}$ , entonces consideramos los momentos generalizados de una medida de probabilidad parametrizada  $\mu_x$  como

$$m_i(x) = \int g_i(\lambda) d\mu_x(\lambda) \quad \text{para } i = 1, \dots, k. \quad (1.16)$$

Es fácil notar que la familia de vectores  $m(x) \in R^k$  es una familia convexa para cada punto  $x$ . Lo que es muy difícil es poder caracterizar tal conjunto convexo de

manera que lo podamos representar de la manera apropiada para definir un problema de optimización. Esto tan solo se puede hacer para unas pocas familias clásicas de funciones, como por ejemplo polinomios, gaussianas, funciones trigonométricas, etc.

Aquí nos ocuparemos del caso especial en que la familia  $\{g_1, \dots, g_k\}$  corresponde a las bases naturales para describir polinomios multi-dimensionales. En este caso, hay resultados parciales propios del álgebra real, que nos permiten conseguir esta caracterización a través de desigualdades matriciales. Esto significa que para exigir que una familia de vectores  $m(x) \in R^k$  sea una familia de vectores momentos, procedentes de una distribución de probabilidad  $\mu_x$  a través de una integración con las funciones  $g_i$ , debemos emplear una matriz  $M$ , llamada *matriz de restricción*, que caracteriza los vectores  $m(x)$  como momentos cuando ellos consiguen hacer semidefinida positiva a la matriz  $M$ , esto es  $M(m(x)) \geq 0$ . La operación  $M(m)$  se refiere a utilizar las entradas del vector  $m$  en ciertas ubicaciones ordenadas y simétricas dentro de la matriz  $M$ .

El lenguaje de desigualdades matriciales ha recibido un gran impulso en los últimos años debido a sus implicaciones en teoría de control y su capacidad para poder representar una gran cantidad de relaciones no lineales en robótica y diseño de mecanismos. En el campo de optimización, este tipo de desigualdades son muy apropiadas porque gozan de una propiedad muy conveniente: ellas definen restricciones convexas. Por esta razón se les emplea en programación matemática e investigación de operaciones para describir conjuntos factibles convexas que no sean lineales o incluso poliédricos. En nuestro trabajo son de gran importancia porque nos permitirán pasar de una variable abstracta, como lo es una medida de probabilidad parametrizada  $\mu_x$  a una variable vectorial  $m(x)$  restringida a un conjunto convexo determinado por la restricción  $M(m(x)) \geq 0$ .

Cuando la expresión para la energía cinética en el problema variacional generalizado (1.12) se puede expresar como un polinomio, o en general como una combinación lineal de funciones propias de una base clásica de funciones, esto es  $W(x, \lambda) = \sum_{i=1}^k c_i(x)g_i(\lambda)$ , entonces la integral  $E_x(W(x, \cdot))$  toma la forma de una combinación lineal en los momentos  $m_1(x), \dots, m_k(x)$ , esta es:

$$E_x(W(x, \cdot)) = \int W(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) = \sum_{i=1}^k c_i(x) \int g_i(\lambda) d\mu_x(\lambda) = \sum_{i=1}^k c_i(x) m_i(x). \quad (1.17)$$

De esta manera el problema variacional generalizado (1.12) toma la forma:

$$\begin{aligned}
& \min_m \int \sum_{i=1}^k c_i(x) m_i(x) + G(x, \psi(x)) \, dx \\
& s.a. \\
& \psi'(x) = m_1(x), \quad M(m(x)) \geq 0, \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Es importante destacar que aunque el problema original (1.7) puede no ser convexo debido a la forma de  $W$ , el problema variacional (1.18) es en realidad un problema de control óptimo que es convexo en las variables de control  $m$ . Note que los vectores  $m$  aparecen como una forma lineal dentro del funcional. Por esta razón posee minimizadores cuando  $W$  es coercivo en  $\lambda$ . También es importante resaltar que su solución  $m^*$  está compuesta por los vectores  $m^*(x)$  que corresponden a los momentos generalizados de las medidas parametrizados óptimas  $\mu_x^*$  que resuelven el problema variacional generalizado (1.12).

El siguiente paso que ha sido decisivo en este trabajo y no cuenta con precedentes en la literatura, es transformar el problema de control óptimo (1.18) en un problema de optimización convexa utilizando una base de aproximación para las funciones  $\psi$  como se suele hacer en teoría de la aproximación y en el método de Ritz utilizado en problemas variacionales de la física matemática. Para ello elegimos una base de interpolación apropiada, las cuales pueden ser gaussianas o exponenciales o funciones trigonométricas según el caso, para representar a la función  $\psi$ . De esta manera, si esta base la representamos como  $\{\phi_1, \dots, \phi_\ell\}$ , entonces el problema de control óptimo planteado en (1.18) se puede plantear como un solo programa matemático convexo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \min_{m, \alpha} \int \left\{ \sum_{i=1}^k c_i(x) m_i(x) + G(x, \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \phi_j(x)) \right\} dx \\
& s.a. \\
& \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \phi_j'(x) = m_1(x), \quad M(m(x)) \geq 0, \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

donde  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_\ell)$  representa los coeficientes que determinan la función  $\psi$  en el esquema de aproximación dado por la base  $\{\phi_1, \dots, \phi_\ell\}$ , esto es  $\psi = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \phi_j$ .

Resaltamos aquí que el modelo (1.19) es suficientemente rico para dar cabida a numerosos casos de aplicación con sus correspondientes esquemas de aproximación. Como



un caso de gran interés podemos incluir un esquema de aproximación vía splines que (a través del principio variacional) da lugar a un esquema tipo elementos finitos. Esta técnica ofrece un panorama inmenso de posibilidades de aplicación en diferentes contextos de física matemática ya que podemos estudiar problemas sin contornos, problemas con condiciones de contorno, contornos semiinfinitos y condiciones de frontera mixtas. En los capítulos siguientes presentaremos dos casos de aplicación específicos en los que se pone de manifiesto la utilidad y posibilidades de la teoría presentada y su solución vía análisis numérico. Resaltamos que los problemas estudiados exigen la implementación de algoritmos y métodos de aproximación en varios cientos o miles de variables, lo que implica que esta metodología requiera de recursos computacionales exigentes para computación científica. Las particularidades de los requisitos de cómputo empleados tanto en hardware como en software aparecen descritas en los apéndices.

# Capítulo 2

## Electrodinámica

### 2.1. Preliminares

La metodología propuesta pretende utilizar las herramientas disponibles de programación matemática no lineal y las técnicas de relajación de problemas variacionales empleando medidas de probabilidad y proyecciones sobre momentos propuestas en [Meziat, 2001, Meziat, 2003a, Meziat, 2004], para abordar la minimización de funcionales no convexos que representan la interacción entre las diferentes partículas que conforman sistemas complejos.

Comúnmente, para abordar la simulación de sistemas mecánicos y sistemas mecánico cuánticos, recurrimos a modelos en ecuaciones diferenciales que a su vez provienen de planteamientos variacionales en espacios de funciones. Es así como el principio de mínima acción conduce a las ecuaciones de Euler Lagrange en mecánica analítica y la minimización de la energía total conduce a la ecuación de Schrodinger en mecánica cuántica.

La presencia de no linealidades en las ecuaciones clásicas de la física matemática, ocasiona situaciones difíciles de superar mediante los algoritmos de integración usuales, ya sea a través de esquemas de diferencias finitas o métodos de interpolación tipo elemento finito para problemas en ecuaciones diferenciales parciales; o los métodos de integración usuales como Runge-Kutta entre otros, para resolver problemas de valor inicial en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Desde la década de los años 90 se cuentan con técnicas de optimización numérica que son apropiadas para abordar la minimización de algunos funcionales clásicos en física

matemática. De esta manera, podemos realizar simulaciones numéricas de problemas mecánicos empleando rutinas de optimización no lineal. Ver [Vanderbei R.J., 2000, Castillo, 2000]. Este enfoque sin embargo presenta sus propias dificultades, la más importante de ellas es la carencia de convexidad en la forma explícita de los potenciales que se desea minimizar. Esta situación es difícil de tratar porque las rutinas numéricas no pueden distinguir entre mínimos locales y mínimos globales durante su proceso de búsqueda, así que pueden detenerse en puntos que no representan de ninguna manera el óptimo de la cantidad física que se busca.

Una manera de superar esta problemática, es acudir a una relajación del problema variacional, esto significa que el problema original se altera de una forma lo suficientemente cuidadosa para no perder información valiosa sobre su solución, pero tal modificación lo hace más tratable desde otro punto de vista, en este caso se consigue una forma convexa del problema. Por esta razón, la técnica de relajación aquí propuesta está basada en la convexificación de expresiones algebraicas no lineales.

## 2.2. Convexificación

Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  su envoltura convexa es la función  $f_c$  que tiene la propiedad de ser la mayor función convexa que acota inferiormente a  $f$ . Para muchos problemas de optimización, la obtención de la envoltura convexa de una expresión es de primordial importancia porque los óptimos globales de  $f$  son óptimos de  $f_c$ . Este resultado es bien conocido en teoría de optimización y análisis convexo. Ver [Ben-Tal and Nemirovskii, 2001]. Esta situación nos conduce a sugerir que para muchos problemas de optimización global es más conveniente utilizar  $f_c$  que la función original  $f$ . En parte porque las expresiones convexas son más apropiadas para los algoritmos de optimización no lineal. Esta observación es completamente válida, pero debemos tener en cuenta que la obtención de envolturas convexas es un problema muy difícil incluso para expresiones algebraicas sencillas. Ver [Ben-Tal and Nemirovskii, 2001, Lasserre, 2001, Lasserre, 2002, Meziat, 2003a].

Desde un punto de vista teórico, la envoltura convexa  $f_c$  puede obtenerse mediante el uso de medidas de probabilidad de la siguiente manera: si aceptamos que  $P(\mathbb{R}^n)$  es la familia de distribuciones de probabilidad en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el valor de la envoltura convexa  $f_c$  en un punto  $a$  se consigue mediante la solución del siguiente problema de

optimización:

$$f_c(a) = \min_{\rho \in P_a(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\rho(x) \quad (2.1)$$

donde  $P_a(\mathbb{R}^n)$  es la familia de distribuciones de probabilidad en  $\mathbb{R}^n$  con la propiedad:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x d\rho(x) = a. \quad (2.2)$$

Este resultado es interesante pero no es práctico para determinar por completo una envoltura convexa  $f_c$  en situaciones específicas. Para ello debemos acudir a la técnica de momentos. Ver [Lasserre, 2001, Lasserre, 2002, Meziat, 2003a].

Si podemos expresar la función  $f$  como una combinación lineal de funciones en una base de funciones clásica, como por ejemplo el sistema algebraico:  $f = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ , entonces el problema 2.1 se convierte en un programa matemático como

$$f_c(a) = \min_{m \in M_a(\mathbb{R}^n)} \sum_{i=1}^n c_i m_i \quad (2.3)$$

donde  $M_a(\mathbb{R}^n)$  es la familia de los vectores  $m$  cuyas entradas son los momentos de las distribuciones de probabilidad en  $P_a(\mathbb{R}^n)$  respecto a la base de funciones  $\psi_i$ .

La caracterización de los momentos de medidas de probabilidad respecto a sistemas de funciones algebraicas es un problema abierto en álgebra moderna, sin embargo hay algunos resultados satisfactorios que nos permiten avanzar en el estudio de modelos interesantes. Ver [Akhiezer and Krein, 1992, Curto and Fialkow, , Curto and Fialkow, 1996, Curto and Fialkow, 2000].

Por ejemplo, en el caso de polinomios bidimensionales debemos emplear matrices análogas a las matrices de Hankel, para caracterizar una familia finita de valores  $m_{k,l}$  como los momentos de una medida positiva en el plano. ver [Lasserre, 2001]. De esta manera, si  $M(m)$  representa dicha matriz, el programa 2.4 toma la forma de un programa semidefinido:

$$f_c(a) = \min_{M(m) \geq 0} \sum_{i=1}^n c_i m_i. \quad (2.4)$$

Este análisis nos permitirá abordar con mayor comodidad situaciones no lineales más complejas en problemas variacionales de física matemática. A continuación veremos cómo esta metodología nos permite abordar con comodidad la simulación numérica de las interacciones electromagnéticas entre varias partículas, cuando consideramos efectos

relativistas y la interacción magnética del movimiento de las partículas cargadas entre sí.

## 2.3. Interacciones electromagnéticas

El “principio de menor acción”, enunciado primero por Fermat y Maupertuis [Lanczos, 1986], es considerado como básico dentro de la física teórica moderna. En él, las ecuaciones diferenciales de movimiento para un sistema físico se derivan reduciendo al mínimo “la acción” del sistema en cuestión. Para un sistema finito de objetos, la acción  $S$  es una integral temporal de una función conocida como la “función de Lagrange o lagrangiano”:

$$L(x, \dot{x}),$$

la cual depende del conjunto de coordenadas y de las velocidades generalizadas

$$(x, \dot{x})$$

del sistema en cuestión.

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}) dt. \quad (2.5)$$

La mecánica lagrangiana, entonces, es una reformulación de la mecánica clásica introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788 [Lagrange, 2001]. En mecánica lagrangiana, la trayectoria de un objeto es derivada encontrando la trayectoria que reduce al mínimo la acción que es la ponderación del lagrangiano en el tiempo; y éste es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

Entonces, el Lagrangiano se escribe como:

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - P(x) \quad (2.6)$$

Donde  $K(\dot{x})$  es la energía cinética y  $P(x)$  es la energía potencial.

Esto simplifica considerablemente muchos problemas físicos. Por ejemplo, considérese una cuenta en un aro. Si se calculara el movimiento de la cuenta usando la mecánica newtoniana, se tendría un sistema de ecuaciones no lineales que considerarían las fuerzas que el aro ejerce en la cuenta en cada momento.

El mismo problema usando mecánica lagrangiana es mucho más simple. Se analizan todos los movimientos posibles que la cuenta podría tomar en el aro y encontramos

matemáticamente la expresión que reduce al mínimo la acción. Hay muy pocas ecuaciones puesto que no se está calculando directamente la influencia del aro en la cuenta en un momento dado. Recientemente este tipo de problemas se han podido abordar mediante optimización numérica utilizando los principios de optimización directamente en el Lagrangiano del problema. Ver [Castillo, 2000, Vanderbei R.J., 2000]. Estos avances han sido posibles gracias al uso de lenguajes algebraicos para el modelado de problemas de optimización, como Gams y AMPL. Estos se describirán más adelante en este informe.

## 2.4. Lagrangiano de Darwin

Este Lagrangiano se define como una función de las velocidades instantáneas y las coordenadas de todas las partículas. Cuando la velocidad finita de la propagación de los campos electromagnéticos toma parte del fenómeno, el Lagrangiano (2.6) no es muy descriptivo, ya que los valores del potencial en una partícula debido a las otras depende del estado del movimiento en tiempos específicos llamados retardos con las que interactúa [Jackson, 1999, McWeeny, 1992].

Sólo cuando los retardos se pueden rechazar, es posible realizar una descripción utilizando el Lagrangiano en función de las posiciones instantáneas y velocidades posibles. Por esta razón se introducen correcciones relativistas con el objetivo de aproximar la interacción de partículas.

Considérese dos partículas que interactúan con cargas  $q_1$  y  $q_2$ , masas  $m_1$  y  $m_2$ , y posiciones  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$ . La separación relativa es  $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  y definimos el límite estático como el negativo de la energía potencial:

$$L_{int}^{NR} = -\frac{q_1 q_2}{r} \quad (2.7)$$

Donde  $r = |\vec{r}|$ .

Si analizamos una partícula específica, podemos tomar el Lagrangiano como el negativo del producto de  $q_1$  y el potencial escalar  $\Phi_{12}$ , que es el potencial de la segunda partícula comparado con el potencial de la primera. Cuando planteamos un modelo más completo, es decir no considerando solamente la estática, debemos determinar  $\Phi_{12}$  y la interacción entre las partículas  $A_{12}$ , al menos con algún grado de aproximación.

Asumiendo las correcciones relativistas de más bajo orden, podemos rechazar los términos de grado superior en el cálculo de  $A_{12}$ , puesto que el vector potencial hace parte del Lagrangiano y la expresión magnetoestática se escribe como:

$$A_{12} \simeq \frac{1}{c} \int \frac{J_t(x') d^3x'}{|x_1 - x'|} \quad (2.8)$$

Donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $J_t$  es la corriente transversal por el efecto de la segunda partícula. Utilizando leyes de Lorentz y de Coulomb, podemos expresar la acción entre las partículas como:

$$A_{12} \simeq \frac{q_2}{2cr} \left[ \vec{v}_2 + \frac{\vec{r}(\vec{v}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right] \quad (2.9)$$

Donde  $\vec{v}_2$  representa la velocidad de la segunda partícula. Con la ecuación (2.9) podemos plantear el potencial debido a la segunda partícula en la posición de la primera, la interacción Lagrangiana para las dos partículas cargadas:

$$L_{int} = \frac{q_1 q_2}{r} \left\{ -1 + \frac{1}{2c^2} \left[ v_1 \cdot v_2 + \frac{(v_1 \cdot r)(v_2 \cdot r)}{r^2} \right] \right\} \quad (2.10)$$

La importancia de la ecuación (2.10) radica en una discusión mecánica cuántica de correcciones relativistas en átomos de dos electrones. Ver [Lindroth, 1989].

En general, para un sistema de partículas que interactúan entre sí el Lagrangiano de Darwin completo, lo escribimos en términos de sumatoria como:

$$L_{Darwin} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \frac{1}{8c^2} \sum_i m_i v_i^4 - \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.11)$$

$$+ \frac{1}{4c^2} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} [v_i \cdot v_j + (v_i \cdot \hat{r}_{ij})(v_j \cdot \hat{r}_{ij})]$$

donde  $r_{ij} = |x_i - x_j|$ ,  $\hat{r}_{ij}$  es un vector unitario en la dirección  $x_i - x_j$ .

El lector debería considerar que el problema de minimizar la acción con el lagrangiano  $L_{Darwin}$  dado en la fórmula 2.11, es altamente no lineal y además no convexo en muchas situaciones que dependen de la posición y las cargas respectivas. Esta observación muestra que no es aconsejable utilizar directamente los métodos de programación no lineal usuales. Ver [Castillo, 2000]. Además la integración numérica de las correspondientes ecuaciones de Euler conllevaría no linealidades muy difíciles de superar con los algoritmos de integración numérica disponibles. Observe que este problema es mucho más complejo que el problema de los tres cuerpos en gravitación. Ver [Vanderbei R.J., 2000].

Desde un punto de vista analítico, es muy importante comentar que no hay resultados a la fecha en los que podamos apoyarnos para concluir la existencia de minimizadores para funcionales definidos como la acción del lagrangiano en 2.11. Este punto es muy importante porque ocupará una parte central en el trabajo siguiente dentro de esta investigación. Por una parte si interpretamos 2.11 como un problema de control óptimo, la no convexidad nos impide aseverar la existencia de minimizadores. Ver [Mourdukovic, 1988]. Por otra parte, desde el punto de vista de los resultados disponibles en análisis funcional y cálculo de variaciones, tampoco podemos concluir nada acerca de la existencia de minimizadores para la acción de (2.11) en espacios clásicos de funciones. Ver [Cesari, 1983, Roubicek, 1997].

Esta situación conlleva dos implicaciones muy interesantes en la presente investigación. Una, cómo determinar la existencia de minimizadores para este tipo de funcionales. La segunda, en la ausencia de minimizadores, aplicando técnicas de análisis convexo y relajaciones en medidas de probabilidad, podemos determinar la presencia de oscilaciones entre estados energéticos. Ver [Pedregal, 1997, Meziat, 2001]. Esta situación permitiría predecir la presencia de oscilaciones entre estados energéticos, en la dinámica relativista de partículas.

Más adelante ofreceremos un ejemplo guía de esta situación para una sola carga bajo potenciales no convexos de energía, el propósito final de este trabajo es determinar tales oscilaciones en dinámicas de interacción mucho más complejas.

## 2.5. Oscilaciones en dinámica no lineal

### 2.5.1. Atracción

Considere el problema de una partícula relativista cargada en un campo magnético proveniente de una carga fija mucho más masiva. Entonces consideraremos un caso hipotético definido por el problema variacional:

$$\begin{aligned} \min_x \int_{t_0}^{t_f} [K(\dot{x}) - P(x)] dt \\ s.t. \quad x(0) = \alpha \\ \dot{x}(0) = \beta \end{aligned} \tag{2.12}$$



Donde, la energía cinética de la partícula atraída por una fuerza se puede escribir como:

$$K(\dot{x}) = (1 - \dot{x}^2)^2. \quad (2.13)$$

Esta expresión es dependiente de la velocidad  $\dot{x}$  y es no convexa en la velocidad.

La energía potencial depende únicamente de la posición del cuerpo en el espacio y la expresamos como:

$$P(x) = \frac{1}{x}. \quad (2.14)$$

Reemplazando (2.13) y (2.14) en (2.12), podemos escribir el problema de optimización como:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \int_{t_0}^{t_f} \left( (1 - \dot{x}^2)^2 - \frac{1}{x} \right) dt \\ \text{s.t.} \quad & x(0) = \alpha \\ & \dot{x}(0) = \beta \end{aligned} \quad (2.15)$$

Una característica de (2.15) es la gran inestabilidad de los métodos numéricos para su solución, debida a la no linealidad y no convexidad intrínsecas. Para resolver este problema, debemos utilizar una base de funciones específica. En [Vanderbei R.J., 2000] se plantea utilizar una base de Fourier, para nuestro problema utilizamos una base polinomial:

$$x(t) = \sum_{k=0}^K c_k t^k. \quad (2.16)$$

Por tanto, al problema (2.15) le adherimos la base de funciones elegida:

$$\begin{aligned} \min_c \quad & \int_{t_0}^{t_f} \left( (1 - \dot{x}^2(t))^2 - \frac{1}{x(t)} \right) dt \\ \text{s.t.} \quad & x(t) = \sum_{k=0}^K c_k t^k \\ & x(0) = \alpha \\ & \dot{x}(0) = \beta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para abordar la no convexidad del problema, utilizamos técnicas de relajación en medidas de Young descritas en [Young, 1969, Roubicek, 1997, Cesari, 1983], [Egozcue and Pedregal, 2003, Pedregal, 1997, Milyutin and Osmolouskii, 2002], [Balder, 1999, Balder, 1997, Mourdukovic, 1988], donde la familia de medidas  $\nu$  se compone de distribuciones parametrizadas por puntos del dominio:

$$\nu = \{\mu_x : t_0 \leq x \leq t_f\}. \quad (2.18)$$

Las medidas parametrizadas óptimas  $\mu^*$ , pueden obtenerse a partir de los momentos algebraicos óptimos:

$$m_k^* = \int_R \lambda^k d\mu^*(\lambda) \quad (2.19)$$

y puesto que el integrando de (2.17) posee una forma polinomial en la variable derivada:

$$f(t, x) = 1 - 2t^2 + t^4 - \frac{1}{x} \quad (2.20)$$

podemos utilizar una caracterización particular del problema en momentos. Vea [Meziat, 2001, Akhiezer and Krein, 1992, Shohat and Tamarkin, 1943], [Krein and Nudelman, 1977, Curto and Fialkow, , Curto and Fialkow, 2000], [Curto and Fialkow, 1996, Egozcue and Pedregal, 2003, Lasserre, 2001], [Lasserre, 2002, Ben-Tal and Nemirovskii, 2001, Meziat, 2003a], [Meziat, 2003b, Meziat, 2004, Nesterov, 2000]. De este modo el funcional se transforma en una forma convexa definida en momentos:

$$J(m) = \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2m_2(t) + m_4(t) - \frac{1}{x(t)} \right) dt \quad (2.21)$$

donde:

$$x(t) = \alpha + \int_0^t m_1(s) ds. \quad (2.22)$$

Por otra parte, debemos imponer dentro del modelo, las restricciones que garantizan que las variables  $m_k(t)$  sean los momentos algebraicos de una distribución de probabilidad. Esto se logra haciendo uso de la matriz de Hankel:

$$H_t = \begin{bmatrix} 1 & m_1(t) & m_2(t) \\ m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) \\ m_2(t) & m_3(t) & m_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

que debe ser semidefinida positiva. Reemplazando en (2.12), tenemos:

$$J(m) = \int_0^{2\pi} \left( 1 - m_2(t) + m_4(t) + \frac{1}{\alpha + \int_0^t m_1(t) dt} \right) dt \quad (2.24)$$

bajo la condición inicial para la velocidad:

$$m_1(0) = \beta. \quad (2.25)$$

También utilizamos una base polinomial para el primer momento, de modo que el problema toma la forma convexa:

$$\begin{aligned}
& \min_m \quad \int_0^{2\pi} \left( 1 - m_2(t) + m_4(t) - \frac{1}{\alpha + \int_0^t m_1(t) dt} \right) \\
& s.t. \quad m_1(t) = \sum_{k=1}^N kt^{k-1} \\
& \quad H_t \geq 0 \\
& \quad m_1(0) = \beta.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Donde  $N$  es el número de términos donde se trunca la base polinomial.

El modelo discreto en  $M$  puntos, utilizando diferencias de Euler, lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
& \min_m \quad \sum_0^M \left( 1 - 2m_2(t_i) + m_4(t_i) - \frac{1}{\alpha + \sum_{j=0}^i m_1(t_j) \Delta t_j} \right) \Delta t_i \\
& s.t. \quad m_1(t_i) = \sum_{k=1}^N kt^{k-1} \\
& \quad H_t \geq 0 \\
& \quad m_1(0) = \beta.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

A continuación mostramos algunas soluciones de (2.27) utilizando diferentes condiciones iniciales.

Sobre los resultados que mostraremos a continuación, es importante resaltar la presencia de oscilaciones causadas por la ausencia de convexidad en el Lagrangiano, de igual manera esta situación indica la ausencia de minimizadores para el problema variacional correspondiente. Detectaremos esta misma situación en interacciones entre varias partículas y determinaremos los esquemas numéricos apropiados para estimarlas cuantitativamente en el transcurso de esta investigación.

### Ejemplo 1

En el primer caso asumimos que las condiciones iniciales de posición y velocidad son de valor unitario, es decir:

$$\alpha = \beta = 1 \tag{2.28}$$

para  $M = 100$  y  $N = 5$ . La Tabla 2.1 muestra la medida en cada instante  $t_i$  con un tamaño de paso de  $\Delta t_i = 2\pi/M$ .

Podemos observar que el funcional bajo las condiciones de frontera (2.28) carece de minimizadores; así habrán alternancias de pendientes en todo el dominio donde las derivadas alternan entre valores  $\pm 1$ . La figura 2.1(a) muestra el resultado para la posición  $x(t)$ .

A pesar de no tener minimizadores se presenta una tendencia a cero debido a la fuerza de atracción presente en el fenómeno.

Con el objetivo de visualizar las oscilaciones utilizamos  $M = 30$  en la figura 2.1(b)

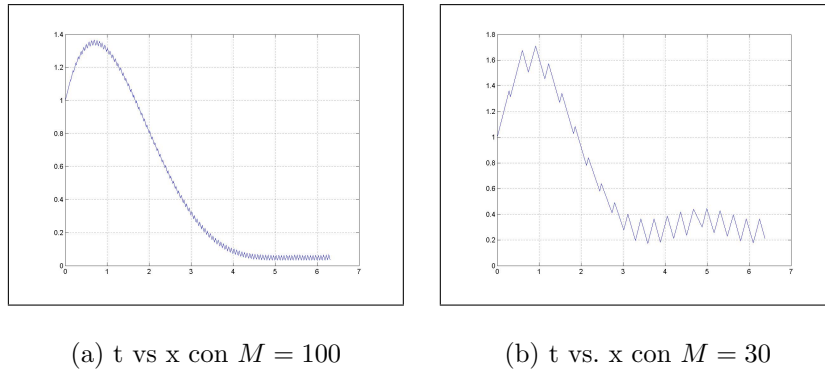


Figura 2.1: Oscilaciones de la posición

## Ejemplo 2

Se resuelve el programa (2.27) con las condiciones iniciales:

$$\alpha = 1 \quad \beta = -2. \quad (2.29)$$

La tabla 2.2 muestra la evolución de la medida óptima en el tiempo y la figura 2.2 la construcción de la medida. Existe una diferencia cualitativa con el caso anterior en los pesos, pero de igual forma los soportes de la medida son  $\pm 1$ .

## Ejemplo 3

Con las condiciones de frontera

$$\alpha = 1 \quad \beta = 2 \quad (2.30)$$

$0) \dots \mu(1,1932)$	$\mu(1,1932) \dots \mu(2,4492)$	$\mu(2,4492) \dots \mu(3,7052)$	$\mu(3,7052) \dots \mu(4,9612)$	$\mu(4,9612) \dots \mu(6,2832)$
$0,98\delta_{-1} + 0,99\delta_1$	$0,74\delta_{-1} + 0,26\delta_1$	$0,74\delta_{-1} + 0,26\delta_1$	$0,57\delta_{-1} + 0,43\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,68\delta_{-1} + 0,93\delta_1$	$0,75\delta_{-1} + 0,25\delta_1$	$0,73\delta_{-1} + 0,27\delta_1$	$0,56\delta_{-1} + 0,44\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,13\delta_{-1} + 0,87\delta_1$	$0,76\delta_{-1} + 0,24\delta_1$	$0,72\delta_{-1} + 0,28\delta_1$	$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,19\delta_{-1} + 0,81\delta_1$	$0,77\delta_{-1} + 0,23\delta_1$	$0,71\delta_{-1} + 0,29\delta_1$	$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,25\delta_{-1} + 0,75\delta_1$	$0,78\delta_{-1} + 0,22\delta_1$	$0,7\delta_{-1} + 0,3\delta_1$	$0,54\delta_{-1} + 0,46\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,3\delta_{-1} + 0,7\delta_1$	$0,78\delta_{-1} + 0,22\delta_1$	$0,69\delta_{-1} + 0,31\delta_1$	$0,54\delta_{-1} + 0,46\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,35\delta_{-1} + 0,65\delta_1$	$0,79\delta_{-1} + 0,21\delta_1$	$0,69\delta_{-1} + 0,31\delta_1$	$0,53\delta_{-1} + 0,47\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,39\delta_{-1} + 0,61\delta_1$	$0,79\delta_{-1} + 0,21\delta_1$	$0,68\delta_{-1} + 0,32\delta_1$	$0,53\delta_{-1} + 0,47\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,44\delta_{-1} + 0,56\delta_1$	$0,79\delta_{-1} + 0,21\delta_1$	$0,67\delta_{-1} + 0,33\delta_1$	$0,52\delta_{-1} + 0,48\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,48\delta_{-1} + 0,52\delta_1$	$0,79\delta_{-1} + 0,21\delta_1$	$0,66\delta_{-1} + 0,34\delta_1$	$0,52\delta_{-1} + 0,48\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$	$0,79\delta_{-1} + 0,21\delta_1$	$0,65\delta_{-1} + 0,35\delta_1$	$0,52\delta_{-1} + 0,48\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$	$0,79\delta_{-1} + 0,21\delta_1$	$0,64\delta_{-1} + 0,36\delta_1$	$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,58\delta_{-1} + 0,42\delta_1$	$0,78\delta_{-1} + 0,22\delta_1$	$0,63\delta_{-1} + 0,37\delta_1$	$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,61\delta_{-1} + 0,39\delta_1$	$0,78\delta_{-1} + 0,22\delta_1$	$0,62\delta_{-1} + 0,38\delta_1$	$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,63\delta_{-1} + 0,37\delta_1$	$0,78\delta_{-1} + 0,22\delta_1$	$0,61\delta_{-1} + 0,39\delta_1$	$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,66\delta_{-1} + 0,34\delta_1$	$0,77\delta_{-1} + 0,23\delta_1$	$0,61\delta_{-1} + 0,39\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,68\delta_{-1} + 0,32\delta_1$	$0,77\delta_{-1} + 0,23\delta_1$	$0,6\delta_{-1} + 0,4\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,7\delta_{-1} + 0,3\delta_1$	$0,76\delta_{-1} + 0,24\delta_1$	$0,59\delta_{-1} + 0,41\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$	$0,49\delta_{-1} + 0,51\delta_1$
$0,71\delta_{-1} + 0,29\delta_1$	$0,75\delta_{-1} + 0,25\delta_1$	$0,58\delta_{-1} + 0,42\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$	$0,49\delta_{-1} + 0,51\delta_1$
$0,73\delta_{-1} + 0,27\delta_1$	$0,74\delta_{-1} + 0,26\delta_1$	$0,57\delta_{-1} + 0,43\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$	$0,49\delta_{-1} + 0,51\delta_1$

Tabla 2.1: Tabla de medidas  $\mu(t_i)$ 

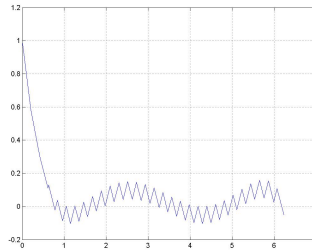
con  $M = 100$  y  $N = 10$  coeficientes polinomiales. La figura 2.3 muestra las oscilaciones correspondientes a este caso.

La medida sobre la cual está soportada la solución de este problema variacional presenta un comportamiento de alternancia entre las pendientes  $\pm 1$ , con pesos variantes. Hasta el tiempo  $t = 2,1352$  en donde la medida adquiere el valor de:

$$\mu^* = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

La Tabla 2.3 muestra la evolución de la medida en el dominio  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

$\mu(0) \dots \mu(3,1410)$	$\mu(0) \dots \mu(6,2832)$
$\delta_{-2}$	$0,56\delta_{-1} + 0,44\delta_1$
$\delta_{-1}$	$0,57\delta_{-1} + 0,43\delta_1$
$0,91\delta_{-1} + 0,089\delta_1$	$0,56\delta_{-1} + 0,44\delta_1$
$0,72\delta_{-1} + 0,28\delta_1$	$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$
$0,59\delta_{-1} + 0,41\delta_1$	$0,53\delta_{-1} + 0,47\delta_1$
$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$0,44\delta_{-1} + 0,56\delta_1$	$0,47\delta_{-1} + 0,53\delta_1$
$0,42\delta_{-1} + 0,58\delta_1$	$0,44\delta_{-1} + 0,56\delta_1$
$0,42\delta_{-1} + 0,58\delta_1$	$0,42\delta_{-1} + 0,58\delta_1$
$0,43\delta_{-1} + 0,57\delta_1$	$0,41\delta_{-1} + 0,59\delta_1$
$0,45\delta_{-1} + 0,55\delta_1$	$0,42\delta_{-1} + 0,58\delta_1$
$0,48\delta_{-1} + 0,52\delta_1$	$0,45\delta_{-1} + 0,55\delta_1$
$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$	$0,51\delta_{-1} + 0,49\delta_1$
$0,53\delta_{-1} + 0,47\delta_1$	$0,61\delta_{-1} + 0,39\delta_1$
$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$	$0,76\delta_{-1} + 0,24\delta_1$

Tabla 2.2: Tabla de medidas  $\mu(t_i)$ Figura 2.2: Oscilaciones  $x(t)$  para  $\alpha = 1$  y  $\beta = -2$ 

### 2.5.2. Repulsión

A diferencia del caso de atracción, el problema de repulsión se representa como:

$$\begin{aligned}
 & \min_x \int_{t_0}^{t_f} [K(\dot{x}) + P(x)] dt \\
 & s.t. \quad x(0) = \alpha \\
 & \quad \quad \dot{x}(0) = \beta
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde la energía cinética la expresamos como:

$$K(\dot{x}) = (1 - \dot{x}^2)^2 \tag{2.32}$$

y la energía potencial como:

$$P(x) = \frac{-1}{x}. \tag{2.33}$$

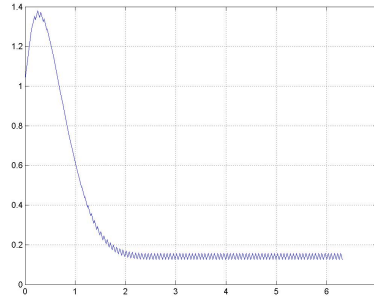


Figura 2.3: Oscilaciones  $x(t)$  para  $\alpha = 1$  y  $\beta = 2$

Utilizando la teoría en medidas de Young con el método de los momentos escribimos el problema variacional como:

$$\begin{aligned}
 \min_m \quad & \int_0^{2\pi} \left( 1 - m_2(t) + m_4(t) + \frac{1}{\alpha + \int_0^t m_1(t) dt} \right) \\
 s.t. \quad & m_1(t) = \sum_{k=1}^N k t^{k-1} \\
 & H_t \geq 0 \\
 & m_1(0) = \beta
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

y la versión discreta de este problema con un esquema de Euler, toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \min_m \quad & \sum_0^M \left( 1 - 2m_2(t_i) + m_4(t_i) - \frac{1}{\alpha + \sum_{j=0}^i m_1(t_j) \Delta t_j} \right) \Delta t_i \\
 s.t. \quad & m_1(t_i) = \sum_{k=1}^N k t^{k-1} \\
 & H_t \geq 0 \\
 & m_1(0) = \beta.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

### Ejemplo 1

Tomamos como condiciones de frontera para el caso de repulsión:

$$\alpha = 0,5 \quad \beta = 0,2. \tag{2.36}$$

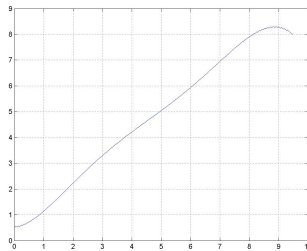
De igual manera se observa una alternancia entre pendientes de valores  $\pm 1$  pero a diferencia del caso de atracción, el peso asociado a la pendiente negativa (-1) es mayor.

$t$	$\mu^*$	$t$	$\mu^*$
0	$\delta_2$	1,6956	$0,58\delta_{-1} + 0,42\delta_1$
0,0628	$0,00011\delta_{-1,2} + 1\delta_{1,1}$	1,7584	$0,57\delta_{-1} + 0,43\delta_1$
0,1256	$0,28\delta_{-1} + 0,72\delta_1$	1,8212	$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$
0,1884	$0,55\delta_{-1} + 0,45\delta_1$	1,8840	$0,54\delta_{-1} + 0,46\delta_1$
0,2512	$0,76\delta_{-1} + 0,24\delta_1$	1,9468	$0,53\delta_{-1} + 0,47\delta_1$
0,3140	$0,91\delta_{-1} + 0,088\delta_1$	2,0096	$0,52\delta_{-1} + 0,48\delta_1$
$0,3768 \leq t \leq 0,8792$	$\delta_{-1}$	2,0724	$0,52\delta_{-1} + 0,48\delta_1$
0,9420	$0,99\delta_{-1} + 0,011\delta_1$	$> 2,1352$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
1,0048	$0,95\delta_{-1} + 0,054\delta_1$		
1,0676	$0,9\delta_{-1} + 0,099\delta_1$		
1,1304	$0,86\delta_{-1} + 0,14\delta_1$		
1,1932	$0,82\delta_{-1} + 0,18\delta_1$		
1,2560	$0,78\delta_{-1} + 0,22\delta_1$		
1,3188	$0,74\delta_{-1} + 0,26\delta_1$		
1,3816	$0,7\delta_{-1} + 0,3\delta_1$		
1,4444	$0,67\delta_{-1} + 0,33\delta_1$		
1,5072	$0,65\delta_{-1} + 0,35\delta_1$		
1,5700	$0,62\delta_{-1} + 0,38\delta_1$		
1,6328	$0,6\delta_{-1} + 0,4\delta_1$		

Tabla 2.3: Tabla de medidas  $\mu(t_i)$ 

Esto significa que la partícula se aleja cada vez más del valor inicial y efectivamente toma la pendiente con un valor de 1.

En la figura 2.4 se ilustra la reconstrucción de las oscilaciones para este caso, con  $M = 100$  y  $N = 10$ .

Figura 2.4: Oscilaciones  $x(t)$  para  $\alpha = 0,5$  y  $\beta = 0,2$ 

## Ejemplo 2

Con las condiciones iniciales

$$\alpha = \beta = 1 \quad (2.37)$$



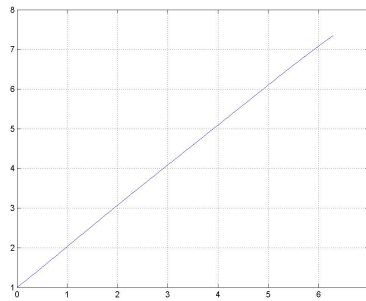
$\dots \mu(1,1932)$	$\mu(1,1932) \dots \mu(2,4492)$	$\mu(2,4492) \dots \mu(3,7052)$	$\mu(3,7052) \dots \mu(4,9612)$	$\mu(4,9612) \dots \mu(6,2832)$
$4\delta_{-1} + 0,6\delta_1$	$\delta_1$	$0,068\delta_{-1} + 0,93\delta_1$	$0,041\delta_{-1} + 0,96\delta_1$	$0,026\delta_{-1} + 0,97\delta_1$
$4\delta_{-1} + 0,66\delta_1$	$\delta_1$	$0,073\delta_{-1} + 0,93\delta_1$	$0,035\delta_{-1} + 0,97\delta_1$	$0,041\delta_{-1} + 0,96\delta_1$
$9\delta_{-1} + 0,71\delta_1$	$\delta_1$	$0,077\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$0,028\delta_{-1} + 0,97\delta_1$	$0,059\delta_{-1} + 0,94\delta_1$
$4\delta_{-1} + 0,76\delta_1$	$\delta_1$	$0,08\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$0,022\delta_{-1} + 0,98\delta_1$	$0,08\delta_{-1} + 0,92\delta_1$
$9\delta_{-1} + 0,81\delta_1$	$\delta_1$	$0,083\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$0,015\delta_{-1} + 0,98\delta_1$	$0,1\delta_{-1} + 0,9\delta_1$
$5\delta_{-1} + 0,85\delta_1$	$\delta_1$	$0,085\delta_{-1} + 0,91\delta_1$	$0,0092\delta_{-1} + 0,99\delta_1$	$0,13\delta_{-1} + 0,87\delta_1$
$2\delta_{-1} + 0,88\delta_1$	$\delta_1$	$0,087\delta_{-1} + 0,91\delta_1$	$0,0034\delta_{-1} + 1\delta_1$	$0,16\delta_{-1} + 0,84\delta_1$
$34\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$\delta_1$	$0,087\delta_{-1} + 0,91\delta_1$	$0,00014\delta_{-1} + 1\delta_1$	$0,2\delta_{-1} + 0,8\delta_1$
$56\delta_{-1} + 0,94\delta_1$	$\delta_1$	$0,087\delta_{-1} + 0,91\delta_1$	$\delta_1$	$0,24\delta_{-1} + 0,76\delta_1$
$31\delta_{-1} + 0,97\delta_1$	$\delta_1$	$0,087\delta_{-1} + 0,91\delta_1$	$\delta_1$	$0,28\delta_{-1} + 0,72\delta_1$
$1\delta_{-1} + 0,99\delta_1$	$\delta_1$	$0,085\delta_{-1} + 0,91\delta_1$	$\delta_1$	$0,33\delta_{-1} + 0,67\delta_1$
$\delta_1$	$0,0045\delta_{-1} + 1\delta_1$	$0,083\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$\delta_1$	$0,38\delta_{-1} + 0,62\delta_1$
$\delta_1$	$0,013\delta_{-1} + 0,99\delta_1$	$0,081\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$\delta_1$	$0,44\delta_{-1} + 0,56\delta_1$
$\delta_1$	$0,021\delta_{-1} + 0,98\delta_1$	$0,077\delta_{-1} + 0,92\delta_1$	$\delta_1$	$0,5\delta_{-1} + 0,5\delta_1$
$\delta_1$	$0,029\delta_{-1} + 0,97\delta_1$	$0,074\delta_{-1} + 0,93\delta_1$	$\delta_1$	$0,57\delta_{-1} + 0,43\delta_1$
$\delta_1$	$0,036\delta_{-1} + 0,96\delta_1$	$0,069\delta_{-1} + 0,93\delta_1$	$\delta_1$	$0,65\delta_{-1} + 0,35\delta_1$
$\delta_1$	$0,043\delta_{-1} + 0,96\delta_1$	$0,064\delta_{-1} + 0,94\delta_1$	$\delta_1$	$0,73\delta_{-1} + 0,27\delta_1$
$\delta_1$	$0,05\delta_{-1} + 0,95\delta_1$	$0,059\delta_{-1} + 0,94\delta_1$	$\delta_1$	$0,81\delta_{-1} + 0,19\delta_1$
$\delta_1$	$0,057\delta_{-1} + 0,94\delta_1$	$0,053\delta_{-1} + 0,95\delta_1$	$\delta_1$	$0,91\delta_{-1} + 0,093\delta_1$
$\delta_1$	$0,063\delta_{-1} + 0,94\delta_1$	$0,047\delta_{-1} + 0,95\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_{-1}$

Tabla 2.4: Tabla de medidas  $\mu(t_i)$ 

el problema (2.35) posee un minimizador en la recta  $y = x$ . Esto se refleja en la medida óptima soportada únicamente en el punto 1:

$$\mu^* = \delta_1. \quad (2.38)$$

La posición de la partícula se puede visualizar en la figura 2.5

Figura 2.5: Oscilaciones  $x(t)$  para  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$

### Ejemplo 3

Para este caso las condiciones iniciales se eligen como:

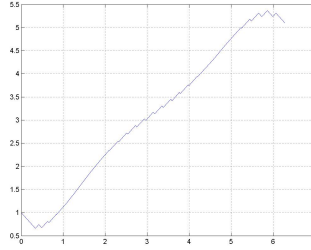
$$\alpha = 1 \quad \beta = -1. \quad (2.39)$$

La tabla 2.5 muestra la medida para los diferentes valores de  $t$  y en la figura 2.6 visualizamos la posición  $x(t)$  de la partícula.

$\mu(0) \dots \mu(6,2832)$
$\delta_{-1}$
$0,62\delta_{-1} + 0,38\delta_1$
$0,33\delta_{-1} + 0,67\delta_1$
$0,14\delta_{-1} + 0,86\delta_1$
$0,0082\delta_{-1} + 0,99\delta_1$
$\delta_1$
$\delta_1$
$\delta_1$
$\delta_1$
$\delta_1$
$0,03\delta_{-1} + 0,97\delta_1$
$0,076\delta_{-1} + 0,92\delta_1$
$0,12\delta_{-1} + 0,88\delta_1$
$0,15\delta_{-1} + 0,85\delta_1$
$0,17\delta_{-1} + 0,83\delta_1$
$0,17\delta_{-1} + 0,83\delta_1$
$0,16\delta_{-1} + 0,84\delta_1$
$0,14\delta_{-1} + 0,86\delta_1$
$0,11\delta_{-1} + 0,89\delta_1$
$0,073\delta_{-1} + 0,93\delta_1$
$0,033\delta_{-1} + 0,97\delta_1$
$\delta_1$
$\delta_1$
$0,063\delta_{-1} + 0,94\delta_1$
$0,18\delta_{-1} + 0,82\delta_1$
$0,37\delta_{-1} + 0,63\delta_1$
$0,64\delta_{-1} + 0,36\delta_1$
$\delta_{-1}$

Tabla 2.5: Tabla de medidas  $\mu(t_i)$

En la siguiente sección realizamos una descripción de las herramientas computacionales para la solución de este tipo de problemas.

Figura 2.6: Oscilaciones  $x(t)$  para  $\alpha = 1$  y  $\beta = -1$ 

## 2.6. Análisis de la interacción relativista de dos partículas cargadas

Consideramos el caso donde dos partículas interactúan entre sí en un espacio unidimensional. La energía cinética de la interacción la podemos expresar como un polinomio de la forma:

$$f(v_1, v_2) = v_1^4 + v_1^2 + \alpha v_1 v_2 + v_2^2 + v_2^4 \quad (2.40)$$

Donde  $v_1$  y  $v_2$  representan las velocidades de cada partícula es decir:

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_1 \\ v_2 &= \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

$x_1$  y  $x_2$  representan el desplazamiento. De la expresión (2.40) podemos observar los términos relativistas presentados en las cuartas potencias de las velocidades ( $v_1^4$  y  $v_2^4$ ) y esto hace que la expresión sea no convexa. Por ejemplo, en la figura 2.7 se puede visualizar claramente la no convexidad producida para  $\alpha = 52$ . Al realizar un análisis

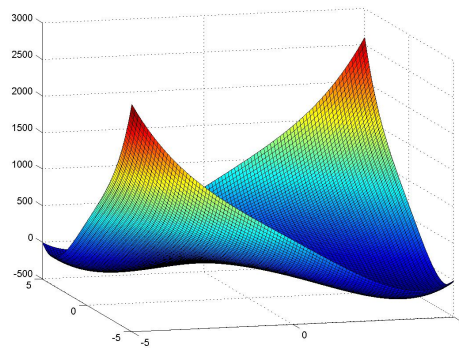


Figura 2.7: Superficie (2.40)

del polinomio (2.40) podemos calcular la envoltura convexa utilizando el método de los momentos [Meziat, 2001, Meziat, 2003a, Meziat, 2003b, Meziat, 2004]. La figura 2.8 muestra la envoltura convexa de la energía cinética (2.40).

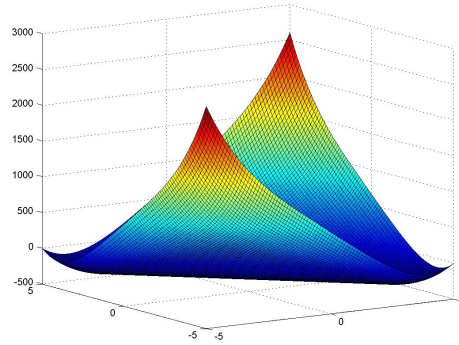


Figura 2.8: Envoltura convexa de (2.40)

Realizamos un análisis sobre la convexidad de (2.40) calculando el gradiente del polinomio:

$$\begin{aligned} 2v_1 + 4v_1^3 + \alpha v_2 &= 0 \\ 2v_2 + 4v_2^3 + \alpha v_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Tomando una simplificación de (2.42) y suponiendo  $v_1 \neq v_2$  obtenemos la expresión:

$$2 + 4(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2) = \alpha \quad (2.43)$$

y de (2.42) obtenemos el Hessiano que debe ser semidefinido positivo:

$$\begin{bmatrix} 2 + 12v_1^2 & \alpha \\ \alpha & 2 + 12v_2^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.44)$$

Todos los elementos son mayores que 0 si  $\alpha > 0$ . Entonces basta con asegurar la positividad del determinante de (2.44) para tener la matriz como definida positiva:

$$(2 + 12v_1^2)(2 + 12v_2^2) \geq \alpha^2. \quad (2.45)$$

Entonces con las ecuaciones (2.43) y (2.44) podemos encontrar un mínimo global dependiendo de los valores de  $\alpha$ . La Figura 2.9 muestra las curvas de nivel de (2.43) y (2.44) para diferentes  $\alpha$ . El mínimo global estará en la parte donde el gradiente se anula, y el Hessiano es mayor a cero. En la figura 2.10 se muestra de manera clara donde se encuentra este mínimo para  $\alpha = 52$ .

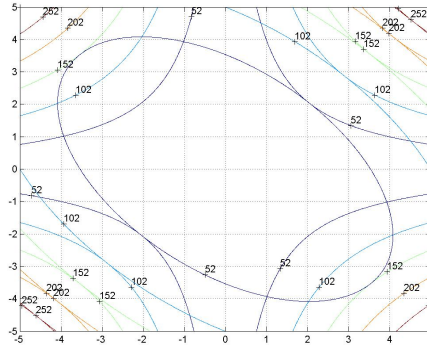
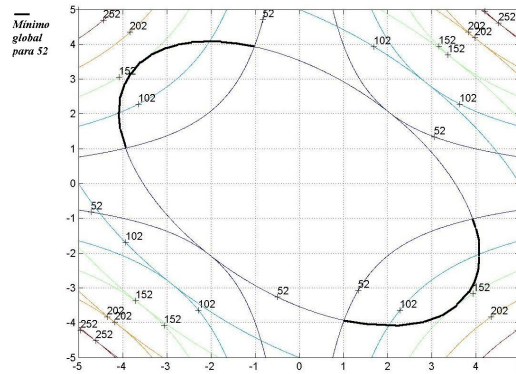


Figura 2.9: Curvas de nivel

Figura 2.10: Mínimos globales para  $\alpha = 52$ 

## 2.7. Lagrangiano sin relatividad

Considere la ecuación (2.11) para dos partículas en un espacio bidimensional con coordenadas  $\vec{x}_1 = [x_1, y_1]$  y  $\vec{x}_2 = [x_2, y_2]$  respectivamente.

$$L_{Darwin} = \frac{1}{2}(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2) + \frac{1}{8c^2}(\rho_1 v_1^4 + \rho_2 v_2^4) - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{r})(\vec{v}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right) \quad (2.46)$$

Para iniciar nuestro análisis supongamos el lagrangiano sin el término relativista, entonces podemos escribirlo como:

$$L = \frac{1}{2}(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2) - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{r})(\vec{v}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right) \quad (2.47)$$

Las velocidades  $v_1$  y  $v_2$  se pueden escribir en funciones de las posiciones como:

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \quad (2.48)$$

y el radio en funcion de la posición como:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.49)$$

Entonces el problema de optimización se puede escribir como:

$$\min_{x,y} \int_{t_0}^{t_f} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt. \quad (2.50)$$

Para poder escribir el problema relajado debemos realizar los productos puntos del funcional (2.47):

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{r} &= x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 - y_2 \dot{y}_1 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{r} &= x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_2 + y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_2 \\ (\vec{v}_1 \cdot \vec{r})(\vec{v}_2 \cdot \vec{r}) &= \dot{x}_1 \dot{x}_2 [(x_1 - x_2)^2] + \dot{x}_1 \dot{y}_2 [(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)] + \dot{x}_2 \dot{y}_1 [(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)] + \dot{y}_1 \dot{y}_2 [(y_1 - y_2)^2] \end{aligned} \quad (2.51)$$

El problema (2.50) es muy inestable si se trata con los algoritmos de solución actualmente empleados para resolver los programas matemáticos no lineales, en particular cuando estos son no convexos. Por ello, utilizamos una base de funciones de Fourier de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{k=0}^N a s_k \sin kt + a c_k \cos kt & x_2(t) &= \sum_{k=0}^N b s_k \sin kt + b c_k \cos kt \\ y_1(t) &= \sum_{k=0}^N c s_k \sin kt + c c_k \cos kt & y_2(t) &= \sum_{k=0}^N d s_k \sin kt + d c_k \cos kt \end{aligned} \quad (2.52)$$

Consideremos el Lagrangiano de Darwin sin términos relativistas:

$$\begin{aligned} L_{Darwin} &= \frac{1}{2}(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2) - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} + \\ &+ \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{r})(\vec{v}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Este problema puede ser escrito en la forma de un problema de control óptimo cuadrático:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \int_{t_0}^{t_f} \omega^T H(X) \omega + R(X) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{X} = \omega \end{aligned} \quad (2.54)$$

Donde  $X = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T$ . Note que  $H$  es el Hessiano del funcional original respecto al vector de velocidades, el cual se calcula mediante las segundas derivadas parciales con respecto a la velocidad en cada eje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= \rho_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{x}_2 \left[ 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{r^2} \right] + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{y}_2 \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= \rho_2 \dot{x}_2 + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{x}_1 \left[ 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{r^2} \right] + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{y}_1 \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= \rho_1 \dot{y}_1 + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{y}_2 \left[ 1 + \frac{(y_1 - y_2)^2}{r^2} \right] + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{x}_2 \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= \rho_2 \dot{y}_2 + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{y}_1 \left[ 1 + \frac{(y_1 - y_2)^2}{r^2} \right] + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \dot{x}_1 \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^2}\end{aligned}$$

Y el Hessiano  $H$  del problema (2.54) se calcula como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \dot{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \dot{y}_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \dot{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \dot{y}_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_1 \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_1 \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_1 \dot{y}_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_2 \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_2 \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_2 \dot{y}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_2^2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

y el resultado es:

$$H = \begin{bmatrix} \rho_1 & \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \rho_2 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \rho_1 & \gamma \\ \beta & 0 & \gamma & \rho_2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

donde,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left[ 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{r^2} \right] \\ \beta &= \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{r^2} \\ \gamma &= \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left[ 1 + \frac{(y_1 - y_2)^2}{r^2} \right]\end{aligned} \quad (2.57)$$

y  $R$  queda definida como:

$$R = -\frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (2.58)$$

## 2.8. Análisis de convexidad

El problema representado en (2.54) es un problema cuadrático y por tanto a simple vista convexo siempre y cuando  $H$  sea semidefinido positivo:

$$H \geq 0.$$

En el caso que  $H$  sea constante, esta condición se puede verificar fácilmente, pero en nuestro caso  $H$  es altamente dependiente de las posiciones  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y la distancia entre las partículas.

Analizamos los determinantes de los menores principales de (2.56) para establecer los puntos de convexidad. Entonces, podemos considerar al problema (2.54) convexo si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\rho_1 \geq 0 \quad (2.59)$$

$$\rho_1 \rho_2 \geq \alpha^2 \quad (2.60)$$

$$\rho_1 \rho_2 \geq \alpha^2 + \beta^2 \quad (2.61)$$

$$\rho_1^2 \rho_2^2 + \beta^4 + \alpha^2 \gamma^2 \geq 2\rho_1 \rho_2 \beta^2 + \rho_1 \rho_2 \gamma^2 + \rho_1 \rho_2 \alpha^2 + 2\alpha \gamma \beta^2 \quad (2.62)$$

La condición (2.59) siempre se cumple debido a que  $\rho_1$  representa la masa de una partícula. Sin embargo las demás desigualdades pueden no llegarse a cumplir dependiendo de las distancias relativas y las proporciones entre masas y cargas. Esta situación compromete la convexidad del problema y de aquí la existencia de minimizadores.

## 2.9. Relajación

Para relajar el problema en las velocidades lineales, utilizamos la teoría de momentos para relajar (2.50) y realizamos una relajación en cuatro dimensiones en las velocidades asociadas a la medida  $\mu$ . Esto es:

$$m_{j,k,l,m} = \int x_1^j x_2^k y_1^l y_2^m d\mu(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (2.63)$$

Y el funcional relajado toma la forma:

$$\begin{aligned} L(x, y, m) = & \frac{1}{2}(\rho_1 m_{2,0,0,0} + \rho_1 m_{0,0,2,0} + \rho_2 m_{0,2,0,0} + \rho_2 m_{0,0,0,2}) \\ & - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_2}{4rc^2} (m_{1,1,0,0} + m_{0,0,1,1} + f(x_1, x_2, y_1, y_2, m)) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Donde:

$$f(x, y, m) = \frac{m_{1,1,0,0}(x_1 - x_2)^2 + m_{1,0,0,1}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + m_{0,1,1,0} + m_{0,0,1,1}(y_1 - y_2)^2}{r^2} \quad (2.65)$$



Para caracterizar los momentos se utiliza una matriz de restricción, la cual debe ser semidefinita positiva. Esta matriz está formada por los momentos en cuatro dimensiones de la siguiente manera:

$$H(m) = \begin{bmatrix} 1 & m_{1,0,0,0} & m_{0,1,0,0} & m_{0,0,1,0} & m_{0,0,0,1} \\ m_{1,0,0,0} & m_{2,0,0,0} & m_{1,1,0,0} & m_{1,0,1,0} & m_{1,0,0,1} \\ m_{0,1,0,0} & m_{1,1,0,0} & m_{0,2,0,0} & m_{0,1,1,0} & m_{1,0,0,1} \\ m_{0,0,1,0} & m_{1,0,1,0} & m_{0,1,1,0} & m_{0,0,2,0} & m_{0,0,1,1} \\ m_{0,0,0,1} & m_{1,0,0,1} & m_{0,1,0,1} & m_{0,0,1,1} & m_{0,0,0,2} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Entonces, el problema de optimización (2.50) toma la forma:

$$\begin{aligned} \min_m \quad & \int_{t_0}^{t_f} L(x, y, m) dt \\ \text{s.t.} \quad & x_1(t) = \alpha + \int_{t_0}^t m_{1,0,0,0} dt \quad x_2(t) = \beta + \int_{t_0}^t m_{0,1,0,0} dt \\ & y_1(t) = \gamma + \int_{t_0}^t m_{0,0,1,0} dt \quad x_2(t) = \epsilon + \int_{t_0}^t m_{0,0,0,1} dt \\ & m_{1,0,0,0} = \sum_{k=1}^N a s_k k \cos kt - a c_k k \sin kt \quad m_{0,1,0,0} = \sum_{k=1}^N b s_k k \cos kt - b c_k k \sin kt \\ & m_{0,0,1,0} = \sum_{k=1}^N c s_k k \cos kt - c c_k k \sin kt \quad m_{0,0,0,1} = \sum_{k=1}^N d s_k k \cos kt - d c_k k \sin kt \\ & H(m) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

El problema de optimización (2.67) se puede discretizar en forma de un programa matemático convexo, tomando una malla de puntos conveniente sobre el intervalo de integración. De esta manera hemos reducido un problema delicado de dinámica no lineal, a la forma de un programa matemático, exigente pero convexo.

## 2.10. Lagrangiano con relatividad

Consideremos el problema de electrodinámica ya descrito, pero contemplando los términos necesarios para conseguir correcciones relativistas:

$$\begin{aligned} L_{Darwin} = & \frac{1}{2}(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2) + \frac{1}{8c^2}(\rho_1 v_1^4 + \rho_2 v_2^4) \\ & - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{r})(\vec{v}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Los términos  $(\rho_1 v_1^4 + \rho_2 v_2^4)$  determinan la dinámica relativista que pueden manifestar las partículas. Y el problema (2.50) se trasforma a la forma:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \int_{t_0}^{t_f} L_R(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \\ \text{s.t.} \quad x_1(0) = \alpha \quad x_2(0) = \beta \\ y_1(0) = \gamma \quad x_2(0) = \epsilon \end{aligned} \quad (2.69)$$

Donde:

$$\begin{aligned} L_R(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = & \frac{1}{2} \rho_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \rho_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \rho_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} \\ & + \frac{\rho_1}{8c^2} [\dot{x}_1^4 + 2\dot{x}_1^2 \dot{y}_1^2 + \dot{y}_1^4] + \frac{\rho_2}{8c^2} [\dot{x}_2^4 + 2\dot{x}_2^2 \dot{y}_2^2 + \dot{y}_2^4] \\ & + \frac{1}{4c^2} \frac{q_1 q_2}{r} \left( \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{r})(\vec{v}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Es claro que el problema (2.70) no es convexo en general, debido a la no convexidad del problema con el funcional (2.68), el cual es una expresión más simple.

La relajación en momentos del funcional (2.70) utilizando las medidas de Young es:

$$\begin{aligned} L_R(x, y, m) = & \frac{1}{2} (\rho_1 m_{2,0,0,0} + \rho_1 m_{0,0,2,0} + \rho_2 m_{0,2,0,0} + \rho_2 m_{0,0,0,2}) \\ & + \frac{\rho_1}{8c^2} [m_{4,0,0,0} + 2m_{2,0,2,0} + m_{0,0,4,0}] + \frac{\rho_2}{8c^2} [m_{0,4,0,0} + 2m_{0,2,0,2} + m_{0,0,0,4}] \\ & - \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_2}{4rc^2} (m_{1,1,0,0} + m_{0,0,1,1} + f(x, y, m)). \end{aligned} \quad (2.71)$$

La matriz que caracteriza los momentos de la distribución de probabilidad se puede escribir en bloques como:

$$H_R(m) = [H_1(m), H_2(m)] \quad (2.72)$$

Donde:

$$H_1(m) = \begin{bmatrix} m_{0000} & m_{1000} & m_{0100} & m_{0010} & m_{0001} & m_{0200} & m_{1100} & m_{1001} \\ m_{1000} & m_{2000} & m_{1100} & m_{1010} & m_{1001} & m_{1200} & m_{2100} & m_{2001} \\ m_{0100} & m_{1100} & m_{0200} & m_{0110} & m_{0101} & m_{0300} & m_{1200} & m_{1101} \\ m_{0010} & m_{1010} & m_{0110} & m_{0020} & m_{0011} & m_{0210} & m_{1110} & m_{1011} \\ m_{0001} & m_{1001} & m_{0101} & m_{0011} & m_{0002} & m_{0201} & m_{1101} & m_{1002} \\ m_{0200} & m_{1200} & m_{0300} & m_{0210} & m_{0201} & m_{0400} & m_{1300} & m_{1201} \\ m_{1100} & m_{2100} & m_{1200} & m_{1110} & m_{1101} & m_{1300} & m_{2200} & m_{2101} \\ m_{1001} & m_{2001} & m_{1101} & m_{1011} & m_{1002} & m_{1201} & m_{2101} & m_{2002} \\ m_{0101} & m_{1101} & m_{0201} & m_{0111} & m_{0102} & m_{0301} & m_{1201} & m_{1102} \\ m_{0002} & m_{1002} & m_{0102} & m_{0012} & m_{0003} & m_{0202} & m_{1102} & m_{1003} \\ m_{2000} & m_{3000} & m_{2100} & m_{2010} & m_{2001} & m_{2200} & m_{3100} & m_{3001} \\ m_{1010} & m_{2010} & m_{1110} & m_{1020} & m_{1011} & m_{1210} & m_{2110} & m_{2011} \\ m_{0110} & m_{1110} & m_{0210} & m_{0120} & m_{0111} & m_{0310} & m_{1210} & m_{1111} \\ m_{0011} & m_{1011} & m_{0111} & m_{0021} & m_{0012} & m_{0211} & m_{1111} & m_{1012} \\ m_{0020} & m_{1020} & m_{0120} & m_{0030} & m_{0021} & m_{0220} & m_{1120} & m_{1021} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

y

$$H_2(m) = \begin{bmatrix} m_{0101} & m_{0002} & m_{2000} & m_{1010} & m_{0110} & m_{0011} & m_{0020} \\ m_{1101} & m_{1002} & m_{3000} & m_{2010} & m_{1110} & m_{1011} & m_{1020} \\ m_{0201} & m_{0102} & m_{2100} & m_{1110} & m_{0210} & m_{0111} & m_{0120} \\ m_{0111} & m_{0012} & m_{2010} & m_{1020} & m_{0120} & m_{0021} & m_{0030} \\ m_{0102} & m_{0003} & m_{2001} & m_{1011} & m_{0111} & m_{0012} & m_{0021} \\ m_{0301} & m_{0202} & m_{2200} & m_{1210} & m_{0310} & m_{0211} & m_{0220} \\ m_{1201} & m_{1102} & m_{3100} & m_{2110} & m_{1210} & m_{1111} & m_{1120} \\ m_{1102} & m_{1003} & m_{3001} & m_{2011} & m_{1111} & m_{1012} & m_{1021} \\ m_{0202} & m_{0103} & m_{2101} & m_{1111} & m_{0211} & m_{0112} & m_{0121} \\ m_{0103} & m_{0004} & m_{2002} & m_{1012} & m_{0112} & m_{0013} & m_{0022} \\ m_{2101} & m_{2002} & m_{4000} & m_{3010} & m_{2110} & m_{2011} & m_{2020} \\ m_{1111} & m_{1012} & m_{3010} & m_{2020} & m_{1120} & m_{1021} & m_{1030} \\ m_{0211} & m_{0112} & m_{2110} & m_{1120} & m_{0220} & m_{0121} & m_{0130} \\ m_{0112} & m_{0013} & m_{2011} & m_{1021} & m_{0121} & m_{0022} & m_{0031} \\ m_{0121} & m_{0022} & m_{2020} & m_{1030} & m_{0130} & m_{0031} & m_{0040} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

así el problema de optimización para describir el comportamiento de dos partículas, con

un termino de relatividad presente lo escribimos como la minimización del Lagrangiano (2.71) sujeto a las restricciones de condiciones inicial y a la matriz (2.72):

$$\begin{aligned}
& \min_m \quad \int_{t_0}^{t_f} L_R(x, y, m) dt \\
& s.t. \quad x_1(t) = \alpha + \int_{t_0}^t m_{1,0,0,0} dt \quad x_2(t) = \beta + \int_{t_0}^t m_{0,1,0,0} dt \\
& \quad y_1(t) = \gamma + \int_{t_0}^t m_{0,0,1,0} dt \quad x_2(t) = \epsilon + \int_{t_0}^t m_{0,0,0,1} dt \\
& \quad m_{1,0,0,0} = \sum_{k=1}^N a s_k k \cos kt - a c_k k \sin kt \quad m_{0,1,0,0} = \sum_{k=1}^N b s_k k \cos kt - b c_k k \sin kt \\
& \quad m_{0,0,1,0} = \sum_{k=1}^N c s_k k \cos kt - c c_k k \sin kt \quad m_{0,0,0,1} = \sum_{k=1}^N d s_k k \cos kt - d c_k k \sin kt \\
& \quad H_R(m) \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

que conduce a un exigente programa matemático convexo.

## 2.11. Resultados

En esta sección mostramos algunos resultados utilizando las herramientas de optimización numérica descritas en los apéndices. Remitimos a ellos al lector interesado en los pormenores de la implementación de programas matemáticos no lineales con un gran número de variables.

### 2.11.1. Prueba 1

En esta prueba, utilizamos como parámetros:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
\rho_2 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
c &= 3 \\
q_1 &= 1,6 \times 10^{-5} \\
q_2 &= -1,6 \times 10^{-5} \\
\alpha &= -0,2 \quad \beta = -0,1 \\
\gamma &= 0,2 \quad \epsilon = 0,1
\end{aligned} \tag{2.76}$$

La figura 2.11(b) muestra la media de la solución al problema y la figura 2.11(a) muestra la solución del problema sin utilizar el método de los momentos.

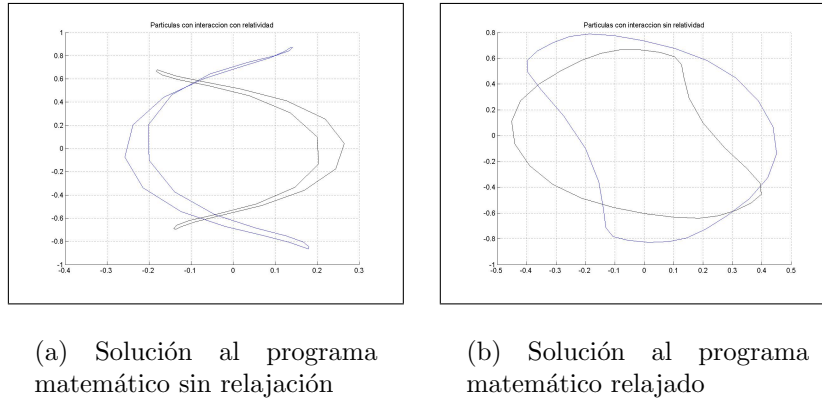


Figura 2.11: Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación)

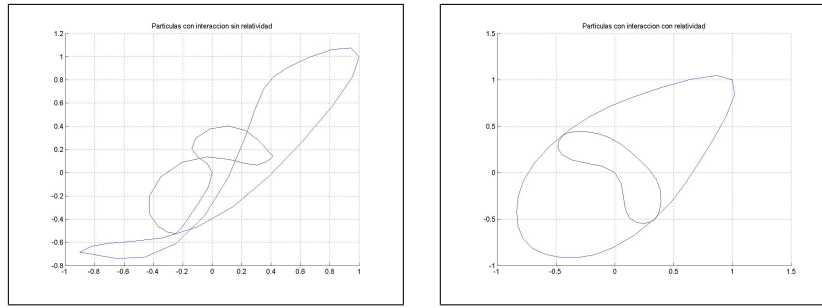
Los momentos resultantes del programa matemático no se listan debido a la enorme cantidad que resultan. De ellos se puede concluir que la medida de probabilidad no son medidas de Dirac, lo que implica una carencia de minimizadores en el problema original y la posibilidad de combinaciones de varios estados energéticos en los momentos del problema.

### 2.11.2. Prueba 2

Los parámetros para esta prueba son:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
 \rho_2 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
 c &= 3 \\
 q_1 &= 1,6 \times 10^{-5} \\
 q_2 &= -1,6 \times 10^{-5} \\
 \alpha &= 1 \quad \beta = 1 \\
 \gamma &= 0 \quad \epsilon = 0.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

La figura 2.12(b) muestra la media de la solución al problema y la figura 2.12(a) muestra la solución del problema sin utilizar el método de los momentos. Como podemos



(a) Solución al programa matemático sin relajación

(b) Solución al programa matemático relajado

Figura 2.12: Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación)

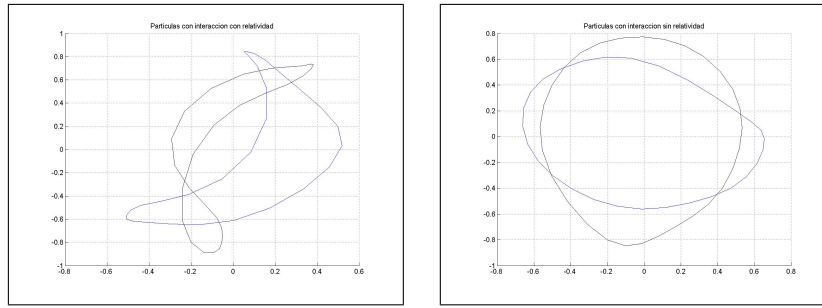
observar, la relajación implica encontrar una envoltura convexa sobre el dominio del problema y describe una trayectoria mas suave y más intuitiva que la solución al problema sin momentos.

### 2.11.3. Prueba 3

Realizamos esta simulación del movimiento de dos partículas con los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
 \rho_2 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
 c &= 3 \\
 q_1 &= 1,6 \times 10^{-5} \\
 q_2 &= -1,6 \times 10^{-5} \\
 \alpha &= 0,5 \quad \beta = 0,2 \\
 \gamma &= -0,2 \quad \epsilon = -0,8
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

En la figura 2.13(a) observamos el comportamiento del problema matemático sin la relajación vía medidas de Young, mientras la figura 2.13(b) muestra la trayectoria de las partículas como a solución del problema matemático relajado.



(a) Solución al programa matemático sin relajación

(b) Solución al programa matemático relajado

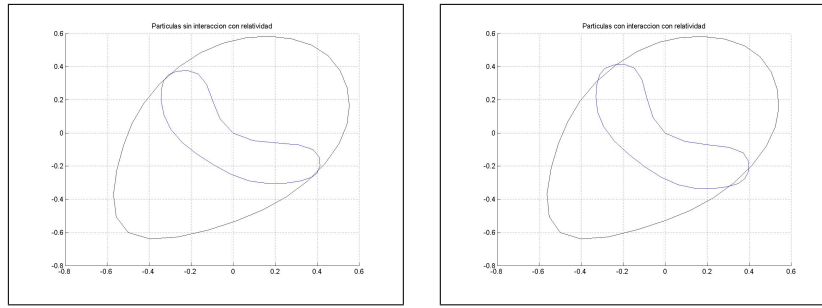
Figura 2.13: Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación)

#### 2.11.4. Prueba 4

En esta prueba analizamos la situación donde las condiciones del Hessiano para la convexidad se cumplen. Los datos para este problema son:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 2 \\
 \rho_2 &= 2,5 \\
 c &= 3 \\
 q_1 &= 1,602 \\
 q_2 &= -1,602 \\
 \alpha &= -0,2 \quad \beta = 0,2 \\
 \gamma &= 0,1 \quad \epsilon = 0,1
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

La figura 2.14(a) muestra la solución al problema matemático sin la utilización de momentos algebraicos, mientras la figura 2.14(b) muestra la solución al problema matemático con la utilización de momentos algebraicos. No hay una diferencia cualitativa de las trayectorias de las partículas debido a que el programa matemático original cae en un caso convexo.



(a) Solución al programa matemático sin relajación

(b) Solución al programa matemático relajado

Figura 2.14: Trayectorias de las partículas (Comparación entre el programa con y sin relajación)

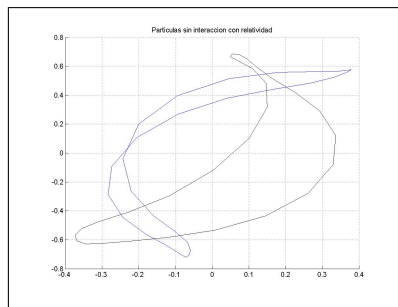
### 2.11.5. Prueba 5

En esta prueba, analizamos la influencia de la relatividad en el fenómeno de interacción de partículas con los siguientes parámetros:

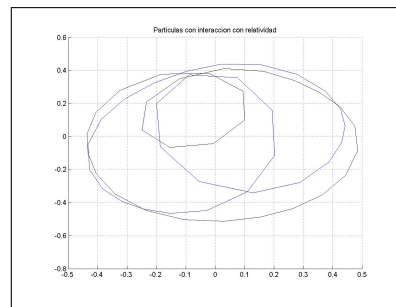
$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
 \rho_2 &= 1,2 \times 10^{-3} \\
 c &= 3 \\
 q_1 &= 1,6 \times 10^{-5} \\
 q_2 &= -1,6 \times 10^{-5} \\
 \alpha &= 0,5 \quad \beta = 0,2 \\
 \gamma &= -0,2 \quad \epsilon = -0,8
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

En la figura 2.15(a) se puede visualizar la solución del problema sin tener en cuenta la relatividad mediante el método de momentos expuesto anteriormente. La figura 2.15(b) muestra el caso donde la relatividad juega un papel importante en la solución del problema.





(a) Solución al programa matemático sin relatividad



(b) Solución al programa matemático con términos relativistas

Figura 2.15: Trayectorias de las partículas (Efecto de la relatividad en un caso particular)

## Capítulo 3

# Potenciales en Redes Cristalinas

En este capítulo aplicamos el método de los momentos a problemas variacionales no convexos utilizados como modelos de equilibrio en redes cristalinas. Para tratar este tipo de problemas, igual que en el capítulo anterior, debemos hacer uso del método de los momentos para problemas variacionales. Presentamos un esquema simple que incorpora las condiciones de contorno dentro del sistema.

Tratamos el cálculo de envolventes convexas de superficies no convexas, como una solución a un problema variacional definido. Presentamos una descripción detallada del proceso de discretización que se debe llevar a cabo para transformar un problema variacional a un programa de programación matemático utilizando la teoría de elementos finitos. Para ilustrar el proceso utilizamos un problema particular de la forma:

$$\iint_{\Omega} \left( \left( 1 - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2(x, y) \right) dx dy \quad (3.1)$$

Nos proponemos analizar problemas no convexos que se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_u I(u) &= \int_{\Omega} \{f(\nabla u(x, y)) + (u(x, y) - h(x, y))^2\} dx dy \\ s.t. \quad u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $f$  es una función no convexa y  $u$  la familia de todas las funciones admisibles en el espacio de  $\Omega$ . [Meziat, 2001, Meziat, 2003a, Meziat, 2004].

Para analizar este tipo de problemas utilizamos la relajación mediante medidas de

Young, entonces introducimos un funcional generalizado con las condiciones de contorno apropiadas:

$$I(\nu) = \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}^2} f(s, t) d\mu_{x,y}(s, t) + (u(x, y) - h(x, y))^2 \right) dx dy$$

$$s.t. \quad \nabla u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} (s, t) d\mu_{x,y}(s, t) \quad (3.3)$$

y la condición de contorno de (3.2). Aquí

$$\nu = \{\mu_{x,y} : (x, y) \in \Omega\} \quad (3.4)$$

es una familia parametrizada de medidas de probabilidad soportada en el plano. Cada uno de estos conjuntos  $\nu$  se conoce como medida de Young, por lo tanto el funcional generalizado está definido en la familia de todas las medidas de Young.

La teoría de medidas de Young [Young, 1969] predice que la función generalizada (3.3) tiene una medida de Young minimizadora  $\nu^* = \{\bar{\mu}_{x,y} : (x, y) \in \Omega\}$  que provee información sobre las sucesiones minimizantes del funcional definido en (3.2). Por lo tanto  $\nabla u_n(x, y) \rightarrow d\bar{\mu}_{x,y}$  en medida, siempre que  $u_n$  sea una sucesión minimizante del funcional. Además las medidas parametrizadas óptimas  $\bar{\mu}_{x,y}$  representan los estados en las velocidades clásicas o los operadores tipo momentos en los casos cuánticos del sistema mecánico correspondiente.

El funcional tiene un minimizador único si y solo si el funcional generalizado tiene un minimizador  $\nu^*$  conformado solamente por medidas de Dirac, que en este caso tienen forma  $\bar{\mu}_{x,y} = \delta_{\nabla u(x,y)}$  con  $\nu^*$  un minimizador.

En este capítulo trataremos funciones bidimensionales no convexas que tengan la forma general:

$$f(s, t) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} c_{i,j} s^i t^j. \quad (3.5)$$

### 3.1. Envolturas bidimensionales

Recordemos que para el caso de un polinomio unidimensional es posible definir su envolvente convexa como:

$$f_c(t) = \min_{\mu} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu(\lambda) \quad (3.6)$$

donde  $\mu$  representa la familia de todas las medidas de probabilidad con media  $t$ . En este caso cada medida de probabilidad representa una combinación convexa de puntos

sobre la recta real. Por lo tanto la medida

$$\mu^* = \lambda_1 \delta_{t_1} + \lambda_2 \delta_{t_2} \quad (3.7)$$

representa la combinación convexa que satisface:

$$\lambda_1(t_1, f(t_1)) + \lambda_2(t_2, f(t_2)) = (t, f_c(t)) \quad (3.8)$$

Sabemos que  $\mu^*$  está soportada, a lo más, en sólo dos puntos gracias al teorema de Caratheodory de análisis convexo [Lasserre, 2001, Curto and Fialkow, , Curto and Fialkow, 1996, Curto and Fialkow, 2000, Lasserre, 2002].

Para un polinomio unidimensional el cálculo de la envolvente convexa para  $f$ :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{2n} c_i t^i \quad (3.9)$$

se puede resolver mediante el programa matemático:

$$\begin{aligned} f_c(t) &= c_0 + c_1 t + \min \sum_{i=2}^{2n} c_i m_i \\ s.a. \quad &\begin{bmatrix} 1 & t & m_2 & \dots & m_n \\ t & m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ m_2 & m_3 & \vdots & \dots & m_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & m_{n+2} & \dots & m_{2n} \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cuando  $f$  tiene una forma bidimensional no separable como aparece en (3.5) su envolvente convexa se define como:

$$f_c(s, t) = \min_{\mu} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma, \gamma) d\mu(\sigma, \gamma) \quad (3.11)$$

Donde  $\mu$  representa la familia de todas las medidas de probabilidad soportadas en el plano que satisfacen

$$(s, t) = \int_{\mathbb{R}} (\sigma, \gamma) d\mu(\sigma, \gamma) \quad (3.12)$$

Ahora, dado que el polinomio que intentamos analizar es no separable, entonces caracterizamos la medida de Young de la envoltura convexa bidimensional mediante la teoría de momentos [R. Meziat and Patiño, ] construyendo una matriz de momentos adecuada. Teniendo en cuenta que al polinomio bidimensional (3.5) en el punto  $t$ , le

corresponde una distribución de probabilidad óptima con momentos algebraicos bidimensionales  $m_{i,j}$  que resuelven el problema matemático:

$$f_c(a, b) = \min_m \sum_{0 \leq i+j \leq 2n} c_{i,j} m_{i,j} \quad (3.13)$$

Donde  $m_{i,j}$  es el momento asociado a la función  $x^i y^j$  de la medida  $\mu$ :

$$m_{i,j} = \int x^i y^j d\mu(x, y). \quad (3.14)$$

Podemos expresar el análisis de una envoltura convexa como la minimización de la combinación lineal en (3.13) y la reconstrucción de la medida óptima  $\mu^*$  a partir de los valores óptima  $m_{i,j}^*$ . La restricción necesaria sobre el programa matemático (3.13), para que éste sea un problema definido sobre momentos, requiere que la matriz  $m$  esté compuesta por momentos. Luego, debemos ser capaces de caracterizarlos apropiadamente. Para ello empleamos matrices con la forma:

$$M(m) = (m_{i+i', j+j'} : 0 \leq i+j \leq n; 0 \leq i'+j' \leq n) \quad (3.15)$$

denominadas matrices de restricción. Para que  $m$  cumpla los requisitos mencionados,  $M(m)$  debe ser semidefinida positiva y tener una forma particular en su estructura interna [Lasserre, 2001, Lasserre, 2002]. La matriz de restricción  $M$  para un polinomio de grado 4 se construye de la siguiente manera:

1. Se crea un vector  $V$  de la siguiente forma:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}$$

2. Se crea una matriz  $N$  de la siguiente forma:

$$N = V^T V \quad (3.16)$$

3. Cada entrada de la matriz  $N$  se cambia por su momento bidimensional correspondiente:

$$x^n y^r \rightarrow m_{nr} \quad (3.17)$$

y estos corresponden a las entradas de la matriz de restricción  $M$ .

De esta manera se encuentra la forma interna de la matriz semidefinida de restricción. Su estructura y su definición positiva garantizan que se trata de una matriz de momentos bidimensionales, al menos hasta un orden de aproximación adecuado.

### 3.1.1. Ejemplo

Considérese el caso particular de un polinomio general de cuarto orden. La matriz  $N$  se escribe como:

$$N = V^T V = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ x & x^2 & xy & x^3 & x^2y & xy^2 \\ y & xy & y^2 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ x^2 & x^3 & x^2y & x^4 & x^3y & x^2y^2 \\ xy & x^2y & xy^2 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 \\ y^2 & xy^2 & y^3 & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Cambiamos las entradas de  $N$  por sus momentos respectivos. Entonces la matriz de restricción  $M$  queda escrita como:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & m_{10} & m_{01} & m_{20} & m_{11} & m_{02} \\ m_{10} & m_{20} & m_{11} & m_{30} & m_{21} & m_{12} \\ m_{01} & m_{11} & m_{02} & m_{21} & m_{12} & m_{03} \\ m_{20} & m_{30} & m_{21} & m_{40} & m_{31} & m_{22} \\ m_{11} & m_{21} & m_{12} & m_{31} & m_{22} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{03} & m_{22} & m_{13} & m_{04} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

y el problema de encontrar la envolvente convexa bidimensional en  $(a, b)$  para un polinomio de cuarto grado se reduce a resolver el siguiente problema matemático:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{0 \leq i+j \leq 4} c_{i,j} m_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & m_{10} & m_{01} & m_{20} & m_{11} & m_{02} \\ m_{10} & m_{20} & m_{11} & m_{30} & m_{21} & m_{12} \\ m_{01} & m_{11} & m_{02} & m_{21} & m_{12} & m_{03} \\ m_{20} & m_{30} & m_{21} & m_{40} & m_{31} & m_{22} \\ m_{11} & m_{21} & m_{12} & m_{31} & m_{22} & m_{13} \\ m_{02} & m_{12} & m_{03} & m_{22} & m_{13} & m_{04} \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donde la matriz de restricción debe ser semidefinida positiva y los momentos  $m_{10}$  y  $m_{01}$  son iguales a  $a$  y  $b$  respectivamente.

### 3.2. Construcción de la medida

Asumiendo que se conoce la solución de los momentos óptimos  $m_{i,j}^*$  del programa (3.20), procedemos a la construcción de las medidas óptimas que resuelven el programa (3.11) y contiene la información de la envolvente convexa en un punto particular  $(a, b)$ .

Para obtener la medida de un polinomio bidimensional seguimos los siguientes pasos [R. Meziat and Patiño, , Meziat and Patino, 2005]: Es de nuestro interés obtener la medida de un polinomio bidimensional de cuarto grado. A continuación mostramos los pasos a seguir utilizando un análisis basado en los momentos de las distribuciones de probabilidad marginales:

1. Se determinan dos polinomios  $P(x)$  y  $P(y)$  a partir del determinante de la matriz de Hankel construida con los momentos óptimos de las distribuciones de probabilidades marginales para  $x$  e  $y$ :

$$P(x) = \begin{vmatrix} m_{00}^* & m_{10}^* & m_{20}^* & m_{30}^* \\ m_{10}^* & m_{20}^* & m_{30}^* & m_{40}^* \\ m_{20}^* & m_{30}^* & m_{40}^* & m_{50}^* \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

$$P(y) = \begin{vmatrix} m_{00}^* & m_{01}^* & m_{02}^* & m_{03}^* \\ m_{01}^* & m_{02}^* & m_{03}^* & m_{04}^* \\ m_{02}^* & m_{03}^* & m_{04}^* & m_{05}^* \\ 1 & y & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

El momento marginal  $m_{00}^*$  es igual a 1 puesto que se trata de una distribución de probabilidad,  $m_{10}^* = a$ ,  $m_{01}^* = b$  porque aplicamos el teorema de Caratheodory en el punto  $(a, b)$  en el cual se necesita reconstruir la medida óptima que determina la envoltura convexa.

2. Se procede a construir el soporte de la medida óptima

$$\mu^* = \sum_{i=1}^3 \delta_{t_{x_i}, t_{y_i}}$$

la cual según el teorema de Caratheodoty debe tener 3 puntos a lo sumo ( $i =$

1, 2, 3) puesto que se trata de una superficie bidimensional, por lo tanto establecemos tres procedimientos de acuerdo con los menores principales de las matrices de Hankel en (3.21).

- Caso (i): Se analizan los menores principales más pequeños de cada matriz independientemente (menores de tamaño  $2 \times 2$ ).

$$\left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{10}^* \\ m_{10}^* & m_{20}^* \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \text{ó} \quad \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{01}^* \\ m_{01}^* & m_{02}^* \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (3.22)$$

Dado que los determinantes de estas submatrices son nulos, el soporte coincide con solo un punto  $t_X = a$  (Soporte en el eje X) y  $t_Y = b$  (Soporte en el eje Y), por lo tanto es una zona de convexidad en la función.

- Caso (ii): Se analizan, independientemente, los menores principales de tamaño  $3 \times 3$ , puesto que los menores principales de tamaño  $2 \times 2$  son positivos.

$$\left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{10}^* \\ m_{10}^* & m_{20}^* \end{bmatrix} \right| > 0 \quad \text{ó} \quad \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{01}^* \\ m_{01}^* & m_{02}^* \end{bmatrix} \right| > 0 \quad (3.23)$$

$$\left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{10}^* & m_{20}^* \\ m_{10}^* & m_{20}^* & m_{30}^* \\ m_{20}^* & m_{30}^* & m_{40}^* \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \text{ó} \quad \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{01}^* & m_{02}^* \\ m_{01}^* & m_{02}^* & m_{03}^* \\ m_{02}^* & m_{03}^* & m_{04}^* \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (3.24)$$

Si el determinante de esta submatriz de tamaño  $3 \times 3$  es nulo, el soporte coincide con dos puntos  $(t_{X_i}, t_{Y_1})$ ,  $(t_{X_2}, t_{Y_2})$  y se determinan hallando las raíces de los polinomios:

$$P(t_X) = \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{10}^* & m_{20}^* \\ m_{10}^* & m_{20}^* & m_{30}^* \\ 1 & t_X & t_X^2 \end{bmatrix} \right| \quad \text{ó} \quad P(t_Y) = \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{01}^* & m_{02}^* \\ m_{01}^* & m_{02}^* & m_{03}^* \\ 1 & t_Y & t_Y^2 \end{bmatrix} \right| \quad (3.25)$$

- Caso (iii): Cuando los menores principales hasta dimensión  $3 \times 3$  son todos positivos, entonces, en este caso debemos tomar un menor de dimensión 4 que define los siguientes polinomios:

$$P(t_X) = \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{10}^* & m_{20}^* & m_{30}^* \\ m_{10}^* & m_{20}^* & m_{30}^* & m_{40}^* \\ m_{20}^* & m_{30}^* & m_{40}^* & m_{50}^* \\ 1 & t_X & t_X^2 & t_X^3 \end{bmatrix} \right| \quad \text{ó} \quad P(t_Y) = \left| \begin{bmatrix} m_{00}^* & m_{01}^* & m_{02}^* & m_{03}^* \\ m_{01}^* & m_{02}^* & m_{03}^* & m_{04}^* \\ m_{02}^* & m_{03}^* & m_{04}^* & m_{05}^* \\ 1 & t_Y & t_Y^2 & t_Y^3 \end{bmatrix} \right| \quad (3.26)$$



En este caso el soporte se halla tomando las raíces de cada polinomio en la expresión (3.26), las cuales son reales y diferentes. Por lo tanto la solución de los  $x$  ( $t_{X_i}$  donde  $i = 0 \dots 3$ ), tales que  $P(t_x) = 0$  coincide con los puntos de soporte en el eje  $x$  y la solución de los  $y$  ( $t_{Y_i}$  donde  $i = 0 \dots 3$ ), tales que  $P(t_y) = 0$  coincide con los puntos de soporte en el eje  $y$ .

3. Por último, obtenemos los pesos de la distribución para reconstruir la medida de probabilidad completamente. Estos pesos representan la combinación convexa que define la envoltura convexa de  $f$  en términos de su gráfica. Por lo tanto se pueden asignar a los puntos hallados anteriormente. Ellos se pueden obtener de acuerdo a los determinantes de los menores principales de la matriz de Hankel ilustrados en el caso anterior. Es decir:

- Caso (i): El peso  $\mu = 1$  cuando sólo existe un punto de soporte, entonces la probabilidad está concentrada toda en un solo punto. Las distribuciones marginales de la medida óptima están dadas por:

$$\mu_X^* = \delta_{t_X} \quad \mu_Y^* = \delta_{t_Y} \quad (3.27)$$

De tal manera que la medida óptima es una medida de Dirac:

$$\mu^* = \delta_{(t_X, t_Y)}$$

- Caso (ii): Los pesos para las distribuciones marginales de la medida óptima se obtienen según la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mu_{X1} &= \frac{t_{X2} - a}{t_{X2} - t_{X1}} & \mu_{X2} &= \frac{a - t_{X1}}{t_{X2} - t_{X1}} \\ \mu_{Y1} &= \frac{t_{Y2} - b}{t_{Y2} - t_{Y1}} & \mu_{Y2} &= \frac{b - t_{Y1}}{t_{Y2} - t_{Y1}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde  $(a, b)$  es el punto donde queremos obtener la medida y  $t_{ij}, i = X, Y, j = 1, 2$  son los soportes obtenidos en el caso (ii) del paso anterior como raíces de  $P$  en (3.21). La medida óptima está dada por:

$$\mu_X = \mu_{X1}\delta_{t_{X1}} + \mu_{X2}\delta_{t_{X2}} \quad \mu_Y = \mu_{Y1}\delta_{t_{Y1}} + \mu_{Y2}\delta_{t_{Y2}} \quad (3.29)$$

- Caso (iii): Los pesos  $\mu$  se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

lineales:

$$\begin{bmatrix} m_{10}^* \\ m_{20}^* \\ m_{30}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{X1} & t_{X2} & t_{X3} \\ t_{X1}^2 & t_{X2}^2 & t_{X3}^2 \\ t_{X1}^3 & t_{X2}^3 & t_{X3}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \mu_{30} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m_{01}^* \\ m_{02}^* \\ m_{03}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{Y1} & t_{Y2} & t_{Y3} \\ t_{Y1}^2 & t_{Y2}^2 & t_{Y3}^2 \\ t_{Y1}^3 & t_{Y2}^3 & t_{Y3}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \mu_{03} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Por lo tanto, en el caso más general existen tres pesos para cada distribución marginal, que corresponden a los tres puntos de soporte de la medida óptima bivariada en el plano, los cuales se asignan en el mismo orden a cada uno de los soportes marginales.

Generalizando y siguiendo los pasos anteriores podemos construir las distribuciones marginales para cada uno de los ejes de la siguiente manera:

$$\mu_X^* = \sum_{i=1}^k \mu_{i0}^* \delta_{t_{X_i}} t_{X_i} \quad \mu_Y^* = \sum_{i=1}^k \mu_{0i}^* \delta_{t_{Y_i}} t_{Y_i} \quad (3.31)$$

Donde  $k$  es el número de puntos de soporte encontrados,  $1 \leq k \leq 3$ . De manera que la medida óptima bivariada, que recoge la información sobre la envoltura convexa de  $f$  en el punto  $(a, b)$  y de aquí la información necesaria para determinar los posibles estados estables del sistema.

### 3.3. Análisis por elementos finitos

Analicemos el problema variacional (3.2) en un  $\Omega$  definido por:

$$\Omega = [0, 1]^2 \quad (3.32)$$

y  $f$  puede ser escrito como un polinomio bidimensional de la forma:

$$f(x, y) = \|z - a\|^2 \|z + a\|^2 \quad (3.33)$$

y  $z = (x, y)$ .

Para resolver el problema (3.2) dentro del dominio (3.32) y con la función (3.33) utilizamos un esquema de elementos finitos. Dividimos el dominio  $\Omega$  en elementos básicos como muestra la figura 3.1

Sin perdida de generalidad en el problema (3.2), asumiremos que tanto el valor en la frontera  $g$  como la función a aproximar  $h$  son nulos, esto quiere decir:

$$g = 0 \quad h = 0 \quad (3.34)$$

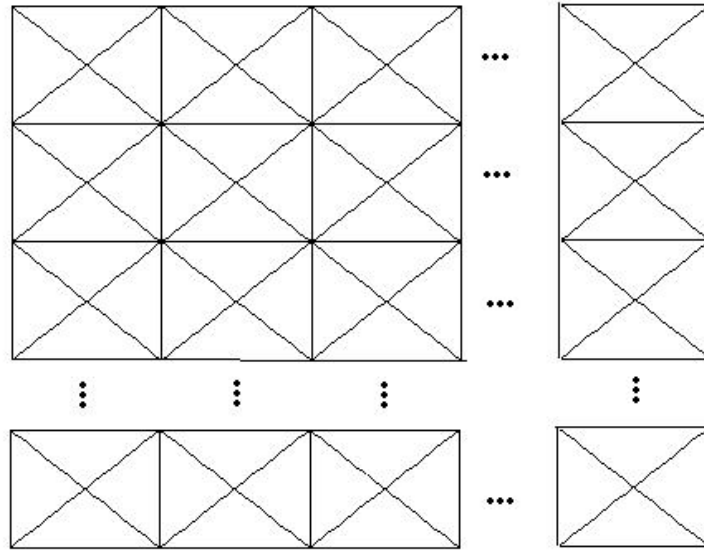


Figura 3.1: Estructura de elementos básicos

y el problema que analizaremos se convierte en:

$$\begin{aligned} \min_u I(u) &= \iint_{\Omega} f(\nabla u(x, y)) + u(x, y)^2 dx dy \\ \text{s.t.} \quad u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

El funcional del problema (3.35) se puede escribir de la forma:

$$\iint_{\Omega} f(\nabla u(x, y)) dx dy + \iint_{\Omega} u(x, y)^2 dx dy \quad (3.36)$$

la integral en el dominio  $\Omega$  de  $u(x, y)$  al cuadrado se puede reemplazar como un producto de coeficientes por una matriz constante que representa la integral sobre el dominio. Estamos considerando que la función admisible  $u$  se puede expresar como una combinación lineal de los miembros de una base de aproximación local:  $u = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j$ . Entonces el problema puede ser escrito como:

$$\min_c \iint_{\Omega} f\left(\sum_{j=1}^n c_j \nabla \phi_j(x, y)\right) dx dy + c^T \Gamma c \quad (3.37)$$

Donde  $c$  es un vector de  $n \times 1$  que representa coeficientes, los cuales son variables de diseño del problema y  $\Gamma$  es una matriz de  $n \times n$  que representa las integrales sobre la superficie definida por los soportes de las funciones base  $\phi_j$ ,  $n$  es el número de nodos presentes en la malla.

Al realizar la discretización del problema (3.37) para escribirlo como un programa matemático, utilizamos un esquema de integración por sumatorias y el programa será:

$$\min_c \sum_{k=1}^n A_k f(\nabla u(e_k)) + c^T \Gamma c. \quad (3.38)$$

Donde  $e_k$  representa el elemento  $k$ -ésimo,  $A_k$  representa el área del elemento y  $n$  es el número de elementos básicos presentes en la superficie.

A continuación realizamos una descripción por elemento finitos para el caso de 16 elementos (División en 2 filas y 2 columnas), luego para 36 elementos (División en 3 filas y 3 columnas) y por último haremos la generalización algorítmica del método y mostraremos casos de 25 elementos, 100 y 400 elementos.

### 3.3.1. 16 elementos de malla

Tomamos el caso particular donde la malla de la figura 3.1 está compuesta por 16 elementos básicos. En la figura 3.2 se puede observar la distribución de los 16 elementos y la numeración que usaremos para referirnos a cada uno, igualmente la numeración que se usará como referencia para cada nodo asociado a la malla.

Cabe recordar al lector que estamos resolviendo el problema donde el valor en la frontera es nulo y por lo tanto el valor que tomara el nodo 5 será 0. A pesar de ello, se adapta esta numeración y se considerará el nodo 5 como un nodo falso. El area de cada elemento

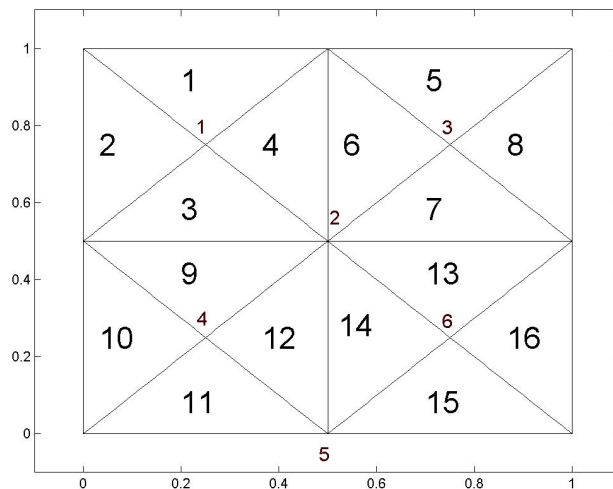


Figura 3.2: Estructura de elementos básicos de  $2 \times 2$

de la figura 3.2 corresponde al área de un triángulo cuya base es  $1/2$  y altura  $1/2$  por lo tanto el área de cada elemento es:

$$A_k = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{16}$$

Para completar la formulación del problema (3.38) debemos hallar las componentes de la matriz  $\Gamma$ :

$$\Gamma_{i,j} = \iint_{\Omega} \phi_i \phi_j dx dy$$

Considerando solo un elemento (Ver figura 3.3), podemos calcular la integral como:

$$\Gamma_{ii} = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_x^{\frac{1}{2}-x} 16x^2 dx dy = \frac{1}{24} \quad \forall \quad i = 1, 3, 4, 6 \quad (3.39)$$

Los demás elementos se calculan de la misma manera solo que las funciones de for-

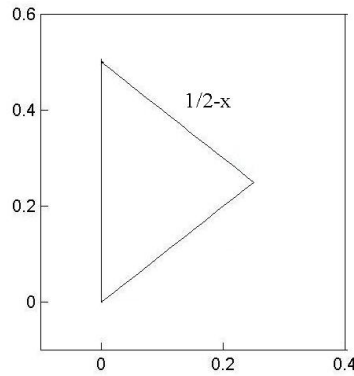


Figura 3.3: Elemento básico

ma cambian de acuerdo al nodo que se este analizando. El valor que representa la interacción del nodo 2 con los nodos 3, 4 y 6 puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &= \Gamma_{2,1} = \Gamma_{3,2} = \Gamma_{2,3} = \Gamma_{2,4} = \Gamma_{4,2} = \Gamma_{2,6} = \Gamma_{6,2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{4}} \int_x^{\frac{1}{2}-x} (4x)(1-2x-2y) dx dy \\ &= \frac{1}{96}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por último calculamos el valor de  $\Gamma_{22}$ , ya que este nodo es el nodo de interconexión con los demás, y se le debe asignar un valor diferente al de  $\Gamma_{ii}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{22} &= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \int_x^{\frac{\sqrt{2}}{4}} 8x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Con las ecuación (3.39), (3.40) y (3.41) podemos escribir  $\Gamma$  como:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & \frac{1}{96} & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{96} \\ 0 & \frac{1}{96} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Ahora, debemos definir los valores de los gradientes de cada elemento asociados a las restricciones para formular por completo el programa matemático. La figuras 3.4(a) y 3.4(b) muestran los gradientes asignados a cada elemento. Matemáticamente se pueden

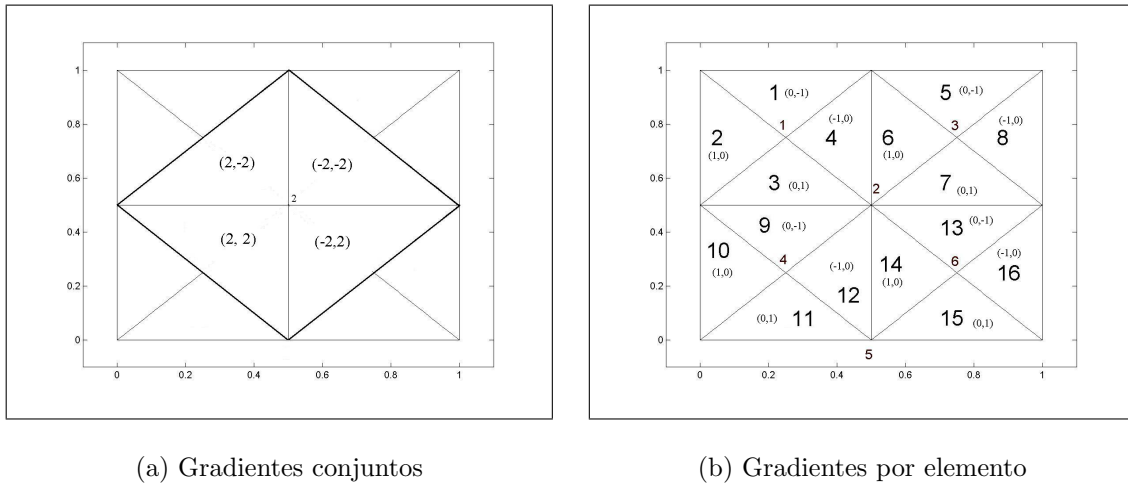


Figura 3.4: Gradientes de los elementos

escribir como:

$$\begin{bmatrix} g_1^x \\ g_1^y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_2^x \\ g_2^y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} g_3^x \\ g_3^y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_4^x \\ g_4^y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g_5^x \\ g_5^y \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_8^x \\ g_8^y \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} g_6^x \\ g_6^y \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_7^x \\ g_7^y \end{bmatrix} = C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} g_1 0^x \\ g_1 0^y \end{bmatrix} &= C_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_1 1^x \\ g_1 1^y \end{bmatrix} &= C_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} g_9^x \\ g_9^y \end{bmatrix} &= C_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_{12}^x \\ g_{12}^y \end{bmatrix} &= C_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} g_{15}^x \\ g_{15}^y \end{bmatrix} &= C_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_{16}^x \\ g_{16}^y \end{bmatrix} &= C_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} g_{13}^x \\ g_{13}^y \end{bmatrix} &= C_6 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_{14}^x \\ g_{14}^y \end{bmatrix} &= C_6 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Estas restricciones junto con el funcional:

$$\min_c \quad \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{16} f(g_k) + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{96} & \frac{1}{12} & \frac{1}{96} & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{96} \\ 0 & \frac{1}{96} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{96} & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{96} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

definen por completo el programa matemático adecuado para este caso.

Donde  $f(g_k)$  es una función no convexa definida por (3.33), por tanto el programa matemático (3.47) debe abordarse con los métodos de relajación estudiados para polinomios no convexos. Para afrontar el problema de convexidad utilizamos la teoría de envolventes convexas expuesta en la sección anterior.

A continuación exponemos el caso para 36 elementos que corresponde a dividir la estructura en 3 filas y 3 columnas.

### 3.3.2. 36 elementos de malla

El caso de 36 elementos en una malla es otro caso particular, el cual corresponde a la estructura de la figura 3.5. De igual forma que en el problema anterior utilizamos una notación numérica y dado que estamos asumiendo que las condiciones de frontera son nulas ( $g = 0$ ), los nodos 12 y 14 son ficticios y son usados para definir un algoritmo de numeración.

Los 36 elementos que utilizamos parten de elementos básicos en forma triangular dentro del dominio de  $\Omega$  previamente definido. De igual forma que para 16 elementos,

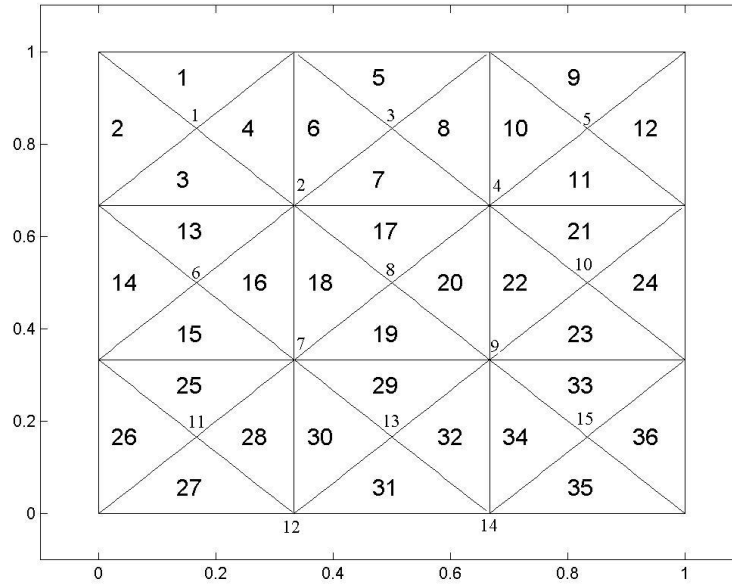


Figura 3.5: Estructura de 36 elementos

debemos definir el programa matemático y por tanto la matriz  $\Gamma$  de discretización con  $n = 15$  y  $N = 36$ , así como las 36 restricciones del problema.

Empezamos definiendo la estructura de los elementos que corresponden a los nodos en la diagonal de la matriz  $\Gamma$  y son independientes a los otros elementos:

$$\Gamma_{ii} = 4 \int_0^{\frac{1}{6}} \int_x^{\frac{1}{3}-x} 36x^2 dx dy = \frac{1}{54} \quad \forall \quad i = 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15 \quad (3.48)$$

Ahora definimos los nodos que son dependientes con otros nodos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22} = \Gamma_{44} = \Gamma_{77} = \Gamma_{99} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{6}} \int_x^{\frac{\sqrt{2}}{6}} 18x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned} \quad (3.49)$$

y los nodos restantes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} = \Gamma_{2,1} = \Gamma_{3,2} = \Gamma_{2,3} = \Gamma_{4,5} = \Gamma_{5,4} = \Gamma_{2,6} = \Gamma_{6,2} \\ \Gamma_{8,4} = \Gamma_{4,8} = \Gamma_{10,4} = \Gamma_{4,10} = \Gamma_{7,6} = \Gamma_{6,7} = \Gamma_{7,8} = \Gamma_{8,7} = \\ \Gamma_{9,10} = \Gamma_{10,9} = \Gamma_{11,7} = \Gamma_{7,11} = \Gamma_{7,13} = \Gamma_{13,7} = \Gamma_{9,13} = \Gamma_{13,9} = \\ \Gamma_{9,15} = \Gamma_{15,9} = 2 \int_0^{\frac{1}{6}} \int_x^{\frac{1}{3}-x} (6x)(1-3x-3y) dx dy = \frac{1}{216}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

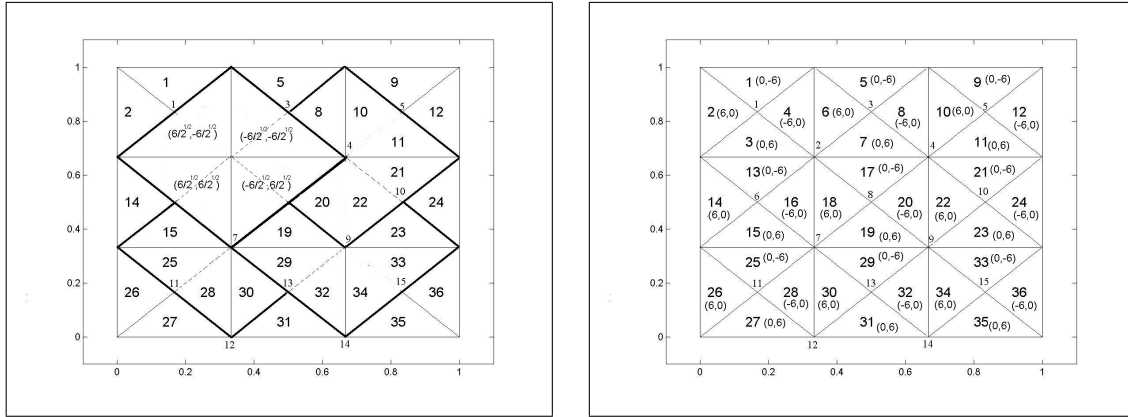


Y la matriz  $\Gamma$  para este caso queda definida como:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1/54 & 1/216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/216 & 1/27 & 1/216 & 1/216 & 0 & 1/216 & 1/216 & 1/216 & 0 & 0 \\ 0 & 1/216 & 1/54 & 1/216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/216 & 1/216 & 1/27 & 1/216 & 0 & 0 & 1/216 & 1/216 & 1/216 \\ 0 & 0 & 0 & 1/216 & 1/54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/216 & 0 & 0 & 0 & 1/54 & 1/216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/216 & 0 & 0 & 0 & 1/216 & 1/27 & 1/216 & 1/216 & 0 \\ 0 & 1/216 & 0 & 1/216 & 0 & 0 & 1/216 & 1/54 & 1/216 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/216 & 0 & 0 & 1/216 & 1/216 & 1/27 & 1/216 \\ 0 & 0 & 0 & 1/216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/216 & 1/54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/216 & 0 & 1/216 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/216 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

De igual forma que en el caso anterior debemos definir los valores de los gradientes que representas las restricciones del programa matemático La figuras 3.6(a) y 3.6(b) muestran los gradientes asignados a cada elemento.



(a) Gradientes conjuntos

(b) Gradientes por elemento

Figura 3.6: Gradientes de los 36 elementos

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/216 & 0 & 1/216 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/216 & 0 & 1/216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/54 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Y se obtienen 72 restricciones lineales, distribuidas así:

$$\begin{aligned} g_k^x & \quad \forall k = 1, \dots, 36 \\ g_k^y & \quad \forall k = 1, \dots, 36 \end{aligned} \quad (3.54)$$

De esta forma definimos el programa matemático como:

$$\begin{aligned}
 \min_c \quad & \sum_{k=1}^{36} \frac{1}{36} f(g_k) + c^T \Gamma_{15 \times 15} c \\
 s.t. \quad & g_k^x = \sum_{i=0}^1 5C_i v_i^x \quad (v_i^x, v_i^y) \in \left\{ \left( \frac{6}{\sqrt{2}}, -\frac{6}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{6}{\sqrt{2}}, -\frac{6}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}} \right), \left( -\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 & g_k^y = \sum_{i=0}^1 5C_i v_i^y.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

### 3.3.3. Generalización

Ya en las dos secciones anteriores analizamos dos casos particulares. En esta sección analizaremos el caso general para cualquier estructura de  $m$  filas y  $m$  columnas.

Recordemos el problema

$$\begin{aligned}
 \min_u I(u) &= \int_{\Omega} f(\nabla u(x, y)) + (u(x, y) - h(x, y))^2 dx dy \\
 s.t. \quad & u|_{\partial\Omega} = g
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Tomemos  $w(x, y) = u(x, y) - g(x, y)$  y el problema queda:

$$\begin{aligned}
 \min_w I(w) &= \int_{\Omega} f(\nabla w(x, y) + \nabla g(x, y)) + (w(x, y) + g(x, y) - h(x, y))^2 dx dy \\
 s.t. \quad & w|_{\partial\Omega} = 0
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

El problema discreto para (3.57) es:

$$\min_c \sum_{k=1}^N A_k f(\nabla w(e_k) + \nabla g(e_k)) + c^T \Gamma c \tag{3.58}$$

Para resolver (3.58), llamamos  $t$  al recorrido sobre las filas y llamamos  $l$  al recorrido sobre las columnas. Ver figura 3.7. La numeración de los elementos y de los nodos se toma de la forma que muestra la figura 3.8, la cual coincide con los dos casos particulares anteriores. La numeración de los nodos se relaciona con el barrido sobre las filas y sobre las columnas mediante una función  $\varphi$ :

$$\varphi(t, l) = (l - 1)(2m - 1) + (2t - 1) \tag{3.59}$$

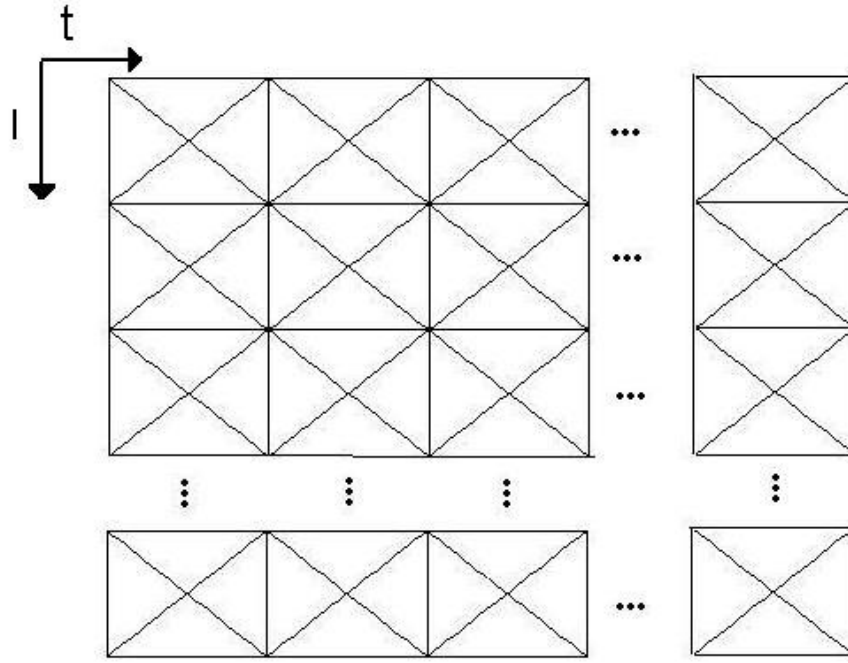
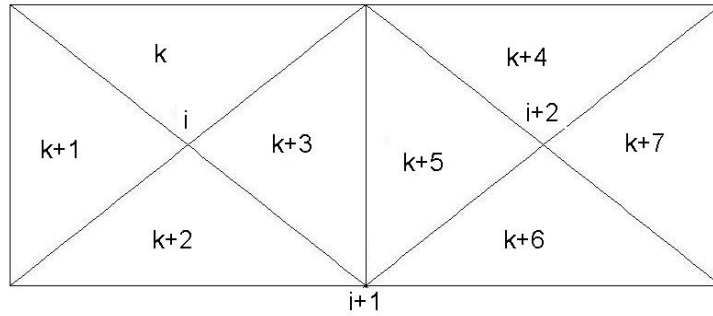
Figura 3.7: Estructura de  $m \times m$  elementos

Figura 3.8: Numeración de los elementos

La primera generalización que debemos realizar es el cálculo de la matriz  $\Gamma$ . Definimos 4 funciones definidas sobre integrales:

$$\begin{aligned}
 f_{t_1}(m) &= 4 \int_0^{1/(2m)} \int_x^{1/m-x} 4m^2 x^2 dy dx \\
 f_{t_2}(m) &= 8 \int_0^{\sqrt{2}/(2m)} \int_x^{\sqrt{2}/(2m)} 2m^2 x^2 dy dx \\
 f_{t_3}(m) &= 2 \int_0^{1/(2m)} \int_0^x (mx - my)(1 - mx - my) dy dx + \\
 &\quad + 2 \int_{1/(2m)}^{1/m} \int_0^{1/m-x} (mx - my)(1 - mx - my) dy dx
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Definimos la matriz  $\Gamma$  por entradas  $\alpha$ :

$$\Gamma_{i,j} = \alpha_{i,j}$$

Entonces escogemos las funciones:

$$\alpha_{i,i} = f_{t_1} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(t, l) \quad 1 \leq t \leq m \quad 1 \leq l \leq m \quad i = \varphi(t, l) \quad (3.61)$$

$$\alpha_{i+1,i+1} = f_{t_2} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(t, l) \quad 1 \leq t \leq m-1 \quad 1 \leq l \leq m-1 \quad (3.62)$$

$$\alpha_{i+3,i+1} = \alpha_{i+1,i+3} = f_{t_3} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(t, l) \quad 1 \leq t \leq m-2 \quad 1 \leq l \leq m-1 \quad (3.63)$$

$$\alpha_{i+1,i+2m-1} = \alpha_{i+2m-1,i+1} = f_{t_3} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(t, l) \quad 1 \leq t \leq m-1 \quad 1 \leq l \leq m-2 \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i+1} &= \alpha_{i+1,i} = \alpha_{i,i-1} = \alpha_{i-1,i} = \alpha_{i,i-2m} = \\ &= \alpha_{i-2m,i} = \alpha_{i,i-2m+2} = \alpha_{i-2m+2,i} = f_{t_4} \quad 2 \leq t \leq m-1 \quad 2 \leq l \leq m-1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \alpha_{2,1} = \alpha_{2m-1,2m-2} = \alpha_{2m-2,2m-1} = f_{t_4} \\ \alpha_{i,i-2m+2} &= \alpha_{i-2m+2,i} = f_{t_4} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(1, m) \\ \alpha_{i,i-2m} &= \alpha_{i-2m,i} = f_{t_4} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(m, m) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i+1} &= \alpha_{i+1,i} = \alpha_{i-1,i} = \alpha_{i,i-1} = f_{t_4} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(t, 1) \quad 2 \leq t \leq m-1 \\ \alpha_{i,i-2m} &= \alpha_{i-2m,i} = \alpha_{i-2m+2,i} = \alpha_{i,i-2m+2} = f_{t_4} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(t, m) \quad 2 \leq t \leq m-1 \\ \alpha_{i,i+1} &= \alpha_{i+1,i} = \alpha_{i-2m+2,i} = \alpha_{i,i-2m+2} = f_{t_4} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(1, l) \quad 2 \leq l \leq m-1 \\ \alpha_{i,i-1} &= \alpha_{i-1,i} = \alpha_{i-2m,i} = \alpha_{i,i-2m} = f_{t_4} \quad \text{cuando} \quad i = \varphi(m, l) \quad 2 \leq l \leq m-1 \end{aligned} \quad (3.67)$$

De esta forma queda completamente definida la matriz  $\Gamma$  y el programa (3.58) se puede resolver mediante software especializado [Fourer, 1993, Brooke A., 2005, Gahinet, 1995].

Ver apéndices.

## 3.4. Ejemplos

### 3.4.1. Ejemplo 1

Consideremos el polinomio:

$$f(x, y) = 4 + y^4 + x^4 + 2x^2y^2 - 8xy \quad (3.68)$$

y el caso donde  $h(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = 0$  y  $m = 3$ . La tabla 3.1 muestra la solución al problema (3.57) con la función (3.68)

Tabla 3.1: Medida para el polinomio (3.68) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = 0$  y  $m = 3$

1	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
2	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
3	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
4	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
5	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
6	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
7	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
8	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
9	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
10	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
11	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
12	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
13	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
14	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
15	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
16	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
17	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
18	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
19	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
20	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
21	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
22	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
23	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
24	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
25	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
26	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
27	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
28	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$

29	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
30	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
31	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
32	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
33	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
34	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
35	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
36	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$

La tabla 3.2 muestra la solución al problema (3.57) con la función (3.68), pero con  $m = 5$ .

Tabla 3.2: Medida para el polinomio (3.68) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = 0$  y  $m = 5$

1	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
2	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
3	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
4	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
5	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
6	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
7	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
8	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
9	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
10	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
11	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
12	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
13	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
14	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
15	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
16	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
17	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$

18	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
19	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
20	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
21	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
22	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
23	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
24	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
25	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
26	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
27	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
28	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
29	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
30	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
31	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
32	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
33	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
34	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
35	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
36	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
37	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
38	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
39	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
40	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
41	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
42	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
43	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
44	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
45	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
46	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
47	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
48	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
49	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
50	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$



51	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
52	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
53	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
54	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
55	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
56	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
57	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
58	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
59	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
60	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
61	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
62	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
63	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
64	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
65	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
66	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
67	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
68	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
69	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
70	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
71	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
72	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
73	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
74	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
75	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
76	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
77	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
78	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
79	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
80	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
81	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
82	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
83	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$

84	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
85	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
86	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
87	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
88	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
89	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
90	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
91	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
92	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
93	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
94	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
95	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
96	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
97	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
98	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
99	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$
100	$0,5\delta_{-1,0002,-1,0002} + 0,5\delta_{1,0002,1,0002}$

### 3.4.2. Ejemplo 2

Ahora consideremos el polinomio (3.68) con  $h(x, y) = x + y$  y  $g(x, y) = 0$  con  $m = 3$ .

La tabla 3.3 muestra la medida que representa la solución del problema.

Tabla 3.3: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = x+y$ ,  
 $g = 0$  y  $m = 3$

1	$1\delta_{-1,-1}$
2	$1\delta_{1,1}$
3	$0,94464\delta_{1,1}$
4	$0,9451\delta_{-1,-1}$
5	$0,17517\delta_{1,1} + 0,82483\delta_{-1,-1}$
6	$1\delta_{-1,-1}$

7	$0,13592\delta_{1,1} + 0,86408\delta_{-1,-1}$
8	$0,22742\delta_{1,1} + 0,77258\delta_{-1,-1}$
9	$0,28394\delta_{1,1} + 0,71606\delta_{-1,-1}$
10	$0,44697\delta_{1,1} + 0,55303\delta_{-1,-1}$
11	$0,44732\delta_{1,1} + 0,55268\delta_{-1,-1}$
12	$0,2843\delta_{1,1} + 0,7157\delta_{-1,-1}$
13	$1\delta_{1,1}$
14	$0,35527\delta_{-1,-1} + 0,64473\delta_{1,1}$
15	$0,36079\delta_{-1,-1} + 0,63921\delta_{1,1}$
16	$1\delta_{1,1}$
17	$0,12562\delta_{1,1} + 0,87438\delta_{-1,-1}$
18	$1\delta_{1,1}$
19	$1\delta_{1,1}$
20	$0,10124\delta_{1,1} + 0,89876\delta_{-1,-1}$
21	$0,22601\delta_{1,1} + 0,77399\delta_{-1,-1}$
22	$0,32567\delta_{1,1} + 0,67433\delta_{-1,-1}$
23	$0,29239\delta_{1,1} + 0,70761\delta_{-1,-1}$
24	$0,17353\delta_{1,1} + 0,82647\delta_{-1,-1}$
25	$0,41242\delta_{-1,-1} + 0,58758\delta_{1,1}$
26	$0,46062\delta_{-1,-1} + 0,53938\delta_{1,1}$
27	$0,46051\delta_{-1,-1} + 0,53949\delta_{1,1}$
28	$0,41232\delta_{-1,-1} + 0,58768\delta_{1,1}$
29	$0,18937\delta_{-1,-1} + 0,81063\delta_{1,1}$
30	$0,36298\delta_{-1,-1} + 0,63702\delta_{1,1}$
31	$0,35742\delta_{-1,-1} + 0,64258\delta_{1,1}$
32	$0,17696\delta_{-1,-1} + 0,82304\delta_{1,1}$
33	$0,15966\delta_{1,1} + 0,84034\delta_{-1,-1}$
34	$0,15942\delta_{-1,-1} + 0,84058\delta_{1,1}$
35	$0,94156\delta_{1,1}$
36	$0,94067\delta_{-1,-1}$

La tabla 3.4 muestra la medida que representa la solución del problema con  $m = 5$ .

Tabla 3.4: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = x+y$ ,  
 $g = 0$  y  $m = 5$

1	$1\delta_{-1,-1}$
2	$1\delta_{1,1}$
3	$1\delta_{1,1}$
4	$1\delta_{-1,-1}$
5	$1\delta_{-1,-1}$
6	$1\delta_{-1,-1}$
7	$1\delta_{-1,-1}$
8	$1\delta_{-1,-1}$
9	$1\delta_{-1,-1}$
10	$1\delta_{-1,-1}$
11	$1\delta_{-1,-1}$
12	$1\delta_{-1,-1}$
13	$1\delta_{-1,-1}$
14	$1\delta_{-1,-1}$
15	$0,32209\delta_{1,1} + 0,67791\delta_{-1,-1}$
16	$0,94669\delta_{-1,-1}$
17	$1\delta_{-1,-1}$
18	$0,42321\delta_{1,1} + 0,57679\delta_{-1,-1}$
19	$0,42384\delta_{1,1} + 0,57616\delta_{-1,-1}$
20	$1\delta_{-1,-1}$
21	$1\delta_{1,1}$
22	$1\delta_{1,1}$
23	$0,10501\delta_{-1,-1} + 0,89499\delta_{1,1}$
24	$1\delta_{1,1}$
25	$0,44909\delta_{1,1} + 0,55091\delta_{-1,-1}$
26	$1\delta_{1,1}$
27	$1\delta_{1,1}$
28	$0,45175\delta_{1,1} + 0,54825\delta_{-1,-1}$
29	$1\delta_{-1,-1}$
30	$0,32523\delta_{-1,-1} + 0,67477\delta_{1,1}$

31	$0,32582\delta_{-1,-1} + 0,67418\delta_{1,1}$
32	$1\delta_{-1,-1}$
33	$1\delta_{-1,-1}$
34	$0,34399\delta_{1,1} + 0,65601\delta_{-1,-1}$
35	$0,34168\delta_{1,1} + 0,65832\delta_{-1,-1}$
36	$1\delta_{-1,-1}$
37	$0,94681\delta_{-1,-1}$
38	$0,33564\delta_{1,1} + 0,66436\delta_{-1,-1}$
39	$1\delta_{1,-1}$
40	$1\delta_{-1,-1}$
41	$0,21052\delta_{-1,-1} + 0,78948\delta_{1,1}$
42	$0,20144\delta_{-1,-1} + 0,79856\delta_{1,1}$
43	$0,24276\delta_{-1,-1} + 0,75724\delta_{1,1}$
44	$0,25059\delta_{-1,-1} + 0,74941\delta_{1,1}$
45	$0,19062\delta_{-1,-1} + 0,80938\delta_{1,1}$
46	$0,91156\delta_{1,1}$
47	$0,11147\delta_{-1,-1} + 0,88853\delta_{1,1}$
48	$0,20791\delta_{-1,-1} + 0,79209\delta_{1,1}$
49	$0,40652\delta_{1,1} + 0,59348\delta_{-1,-1}$
50	$1\delta_{1,1}$
51	$1\delta_{1,1}$
52	$0,40354\delta_{1,1} + 0,59646\delta_{-1,-1}$
53	$0,90187\delta_{-1,-1}$
54	$0,40458\delta_{-1,-1} + 0,59542\delta_{1,1}$
55	$0,37247\delta_{-1,-1} + 0,62753\delta_{1,1}$
56	$1\delta_{-1,-1}$
57	$1\delta_{-1,-1}$
58	$0,28414\delta_{1,1} + 0,71586\delta_{-1,-1}$
59	$1\delta_{-1,-1}$
60	$1\delta_{-1,-1}$
61	$0,33338\delta_{-1,-1} + 0,66662\delta_{1,1}$
62	$0,35893\delta_{-1,-1} + 0,64107\delta_{1,1}$
63	$0,3641\delta_{-1,-1} + 0,6359\delta_{1,1}$

64	$0,3395\delta_{-1,-1} + 0,6605\delta_{1,1}$
65	$0,27415\delta_{-1,-1} + 0,72585\delta_{1,1}$
66	$0,22155\delta_{-1,-1} + 0,77845\delta_{1,1}$
67	$0,22149\delta_{-1,-1} + 0,77851\delta_{1,1}$
68	$0,27406\delta_{-1,-1} + 0,72594\delta_{1,1}$
69	$0,25292\delta_{-1,-1} + 0,74708\delta_{1,1}$
70	$0,12455\delta_{-1,-1} + 0,87545\delta_{1,1}$
71	$0,9037\delta_{1,1}$
72	$0,23426\delta_{-1,-1} + 0,76574\delta_{1,1}$
73	$0,27011\delta_{1,1} + 0,72989\delta_{-1,-1}$
74	$0,92976\delta_{1,1}$
75	$1\delta_{1,1}$
76	$0,21706\delta_{1,1} + 0,78294\delta_{-1,-1}$
77	$1\delta_{-1,-1}$
78	$0,33634\delta_{1,1} + 0,66366\delta_{-1,-1}$
79	$1\delta_{-1,-1}$
80	$1\delta_{-1,-1}$
81	$0,41684\delta_{-1,-1} + 0,58316\delta_{1,1}$
82	$0,46066\delta_{-1,-1} + 0,53934\delta_{1,1}$
83	$0,4606\delta_{-1,-1} + 0,5394\delta_{1,1}$
84	$0,41677\delta_{-1,-1} + 0,58323\delta_{1,1}$
85	$0,33915\delta_{-1,-1} + 0,66085\delta_{1,1}$
86	$0,36413\delta_{-1,-1} + 0,63587\delta_{1,1}$
87	$0,3588\delta_{-1,-1} + 0,6412\delta_{1,1}$
88	$0,33286\delta_{-1,-1} + 0,66714\delta_{1,1}$
89	$0,27614\delta_{-1,-1} + 0,72386\delta_{1,1}$
90	$0,24236\delta_{-1,-1} + 0,75764\delta_{1,1}$
91	$0,2006\delta_{-1,-1} + 0,7994\delta_{1,1}$
92	$0,23987\delta_{-1,-1} + 0,76013\delta_{1,1}$
93	$0,24888\delta_{-1,-1} + 0,75112\delta_{1,1}$
94	$0,11855\delta_{-1,-1} + 0,88145\delta_{1,1}$
95	$1\delta_{1,1}$
96	$0,13239\delta_{-1,-1} + 0,86761\delta_{1,1}$

97	$0,95407\delta_{-1,-1}$
98	$0,95429\delta_{1,1}$
99	$1\delta_{1,1}$
100	$1\delta_{-1,-1}$

### 3.4.3. Ejemplo 3

El polinomio (3.68) con  $h(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = x + y$  con  $m = 3$ . La tabla 3.5 muestra la medida resultado de la solución del programa matemático con  $m = 3$ .

Tabla 3.5: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = x + y$  y  $m = 3$

1	$1\delta_{1,1}$
2	$0,1231\delta_{-1,-1} + 0,8769\delta_{1,1}$
3	$0,12532\delta_{-1,-1} + 0,87468\delta_{1,1}$
4	$1\delta_{1,1}$
5	$1\delta_{1,1}$
6	$1\delta_{1,1}$
7	$1\delta_{1,1}$
8	$1\delta_{1,1}$
9	$1\delta_{1,1}$
10	$1\delta_{1,1}$
11	$1\delta_{1,1}$
12	$1\delta_{1,1}$
13	$0,11223\delta_{-1,-1} + 0,88777\delta_{1,1}$
14	$0,12319\delta_{-1,-1} + 0,87681\delta_{1,1}$
15	$0,13773\delta_{-1,-1} + 0,86227\delta_{1,1}$
16	$0,12717\delta_{-1,-1} + 0,87283\delta_{1,1}$
17	$1\delta_{1,1}$
18	$0,1281\delta_{-1,-1} + 0,8719\delta_{1,1}$
19	$0,12127\delta_{-1,-1} + 0,87873\delta_{1,1}$

20	$1\delta_{1,1}$
21	$1\delta_{1,1}$
22	$1\delta_{1,1}$
23	$1\delta_{1,1}$
24	$1\delta_{1,1}$
25	$0,084981\delta_{-1,-1} + 0,91502\delta_{1,1}$
26	$0,038419\delta_{-1,-1} + 0,96158\delta_{1,1}$
27	$0,03852\delta_{-1,-1} + 0,96148\delta_{1,1}$
28	$0,0851\delta_{-1,-1} + 0,9149\delta_{1,1}$
29	$0,021054\delta_{-1,-1} + 0,97895\delta_{1,1}$
30	$0,1372\delta_{-1,-1} + 0,8628\delta_{1,1}$
31	$0,12301\delta_{-1,-1} + 0,87699\delta_{1,1}$
32	$0,99448\delta_{1,1}$
33	$1\delta_{1,1}$
34	$0,11086\delta_{-1,-1} + 0,88914\delta_{1,1}$
35	$0,10241\delta_{-1,-1} + 0,89759\delta_{1,1}$
36	$1\delta_{1,1}$

La tabla 3.6 muestra la medida con  $m = 5$ , el cual produce 100 elementos para los cuales cada uno tiene la reconstrucción en momentos.

Tabla 3.6: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = x + y$  y  $m = 5$

1	$1\delta_{1,1}$
2	$0,18259\delta_{-1,-1} + 0,81741\delta_{1,1}$
3	$0,16833\delta_{-1,-1} + 0,83167\delta_{1,1}$
4	$1\delta_{1,1}$
5	$1\delta_{1,1}$
6	$1\delta_{1,1}$
7	$1\delta_{1,1}$
8	$1\delta_{1,1}$



9	$1\delta_{1,1}$
10	$1\delta_{1,1}$
11	$1\delta_{1,1}$
12	$1\delta_{1,1}$
13	$1\delta_{1,1}$
14	$1\delta_{1,1}$
15	$1\delta_{1,1}$
16	$1\delta_{1,1}$
17	$1\delta_{1,1}$
18	$1\delta_{1,1}$
19	$1\delta_{1,1}$
20	$1\delta_{1,1}$
21	$1\delta_{1,1}$
22	$0,29174\delta_{-1,-1} + 0,70826\delta_{1,1}$
23	$0,35128\delta_{-1,-1} + 0,64872\delta_{1,1}$
24	$0,10402\delta_{-1,-1} + 0,89598\delta_{1,1}$
25	$1\delta_{1,1}$
26	$0,15522\delta_{-1,-1} + 0,84478\delta_{1,1}$
27	$0,17009\delta_{-1,-1} + 0,82991\delta_{1,1}$
28	$1\delta_{1,1}$
29	$1\delta_{1,1}$
30	$1\delta_{1,1}$
31	$0,99738\delta_{1,1}$
32	$1\delta_{1,1}$
33	$1\delta_{1,1}$
34	$1\delta_{1,1}$
35	$1\delta_{1,1}$
36	$1\delta_{1,1}$
37	$1\delta_{1,1}$
38	$1\delta_{1,1}$
39	$1\delta_{1,1}$
40	$1\delta_{1,1}$
41	$0,12508\delta_{-1,-1} + 0,87492\delta_{1,1}$

42	$0,21812\delta_{-1,-1} + 0,78188\delta_{1,1}$
43	$0,25849\delta_{-1,-1} + 0,74151\delta_{1,1}$
44	$0,17838\delta_{-1,-1} + 0,82162\delta_{1,1}$
45	$1\delta_{1,1}$
46	$0,28174\delta_{-1,-1} + 0,71826\delta_{1,1}$
47	$0,29156\delta_{-1,-1} + 0,70844\delta_{1,1}$
48	$1\delta_{1,1}$
49	$1\delta_{1,1}$
50	$0,10093\delta_{-1,-1} + 0,89907\delta_{1,1}$
51	$0,093758\delta_{-1,-1} + 0,90624\delta_{1,1}$
52	$1\delta_{1,1}$
53	$1\delta_{1,1}$
54	$0,99668\delta_{1,1}$
55	$1\delta_{1,1}$
56	$1\delta_{1,1}$
57	$1\delta_{1,1}$
58	$1\delta_{1,1}$
59	$1\delta_{1,1}$
60	$1\delta_{1,1}$
61	$0,15307\delta_{-1,-1} + 0,84693\delta_{1,1}$
62	$0,12192\delta_{-1,-1} + 0,87808\delta_{1,1}$
63	$0,13627\delta_{-1,-1} + 0,86373\delta_{1,1}$
64	$0,16628\delta_{-1,-1} + 0,83372\delta_{1,1}$
65	$0,12353\delta_{-1,-1} + 0,87647\delta_{1,1}$
66	$0,2748\delta_{-1,-1} + 0,7252\delta_{1,1}$
67	$0,2754\delta_{-1,-1} + 0,7246\delta_{1,1}$
68	$0,12416\delta_{-1,-1} + 0,87584\delta_{1,1}$
69	$1\delta_{1,1}$
70	$0,25922\delta_{-1,-1} + 0,74078\delta_{1,1}$
71	$0,24659\delta_{-1,-1} + 0,75341\delta_{1,1}$
72	$1\delta_{1,1}$
73	$1\delta_{1,1}$
74	$0,068332\delta_{-1,-1} + 0,93167\delta_{1,1}$

75	$0,038572\delta_{-1,-1} + 0,96143\delta_{1,1}$
76	$1\delta_{1,1}$
77	$1\delta_{1,1}$
78	$1\delta_{1,1}$
79	$1\delta_{1,1}$
80	$1\delta_{1,1}$
81	$0,081439\delta_{-1,-1} + 0,91856\delta_{1,1}$
82	$0,039456\delta_{-1,-1} + 0,96054\delta_{1,1}$
83	$0,039771\delta_{-1,-1} + 0,96023\delta_{1,1}$
84	$0,08176\delta_{-1,-1} + 0,91824\delta_{1,1}$
85	$0,16675\delta_{-1,-1} + 0,83325\delta_{1,1}$
86	$0,13613\delta_{-1,-1} + 0,86387\delta_{1,1}$
87	$0,12262\delta_{-1,-1} + 0,87738\delta_{1,1}$
88	$0,15437\delta_{-1,-1} + 0,84563\delta_{1,1}$
89	$0,13995\delta_{-1,-1} + 0,86005\delta_{1,1}$
90	$0,25924\delta_{-1,-1} + 0,74076\delta_{1,1}$
91	$0,21992\delta_{-1,-1} + 0,78008\delta_{1,1}$
92	$0,081469\delta_{-1,-1} + 0,91853\delta_{1,1}$
93	$1\delta_{1,1}$
94	$0,29605\delta_{-1,-1} + 0,70395\delta_{1,1}$
95	$0,25123\delta_{-1,-1} + 0,74877\delta_{1,1}$
96	$1\delta_{1,1}$
97	$1\delta_{1,1}$
98	$0,16946\delta_{-1,-1} + 0,83054\delta_{1,1}$
99	$0,15508\delta_{-1,-1} + 0,84492\delta_{1,1}$
100	$1\delta_{1,1}$

#### 3.4.4. Ejemplo 4

En este caso tomamos  $h(x, y) = x + y$  y  $g(x, y) = x + y$  con  $m = 3$ . La tabla 3.7 muestra la medida solución a este problema.

Tabla 3.7: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = x+y$ ,  
 $g = x + y$  y  $m = 3$

1	$1\delta_{1,1}$
2	$1\delta_{1,0,99999}$
3	$1\delta_{0,99999,1}$
4	$1\delta_{1,1}$
5	$1\delta_{0,99999,1}$
6	$1\delta_{1,1}$
7	$1\delta_{1,1}$
8	$1\delta_{0,99998,1}$
9	$1\delta_{1,1}$
10	$1\delta_{0,99998,0,99998}$
11	$1\delta_{0,99998,0,99998}$
12	$1\delta_{1,1}$
13	$1\delta_{1,1}$
14	$1\delta_{1,1}$
15	$1\delta_{1,1}$
16	$1\delta_{1,1}$
17	$1\delta_{1,1}$
18	$1\delta_{1,1}$
19	$1\delta_{1,1}$
20	$1\delta_{1,1}$
21	$1\delta_{0,99996,0,99998}$
22	$1\delta_{1,1}$
23	$1\delta_{1,0001,0,99999}$
24	$1\delta_{1,0,99994}$
25	$1\delta_{1,1}$
26	$1\delta_{1,1}$
27	$1\delta_{1,1}$
28	$1\delta_{1,1}$
29	$1\delta_{1,1}$
30	$1\delta_{1,0,99998}$

31	$1\delta_{0,99999,1}$
32	$1\delta_{1,1}$
33	$1\delta_{1,0,99999}$
34	$1\delta_{1,1}$
35	$1\delta_{1,1}$
36	$1\delta_{1,0,99999}$

La tabla 3.8 muestra la medida solución cuando  $m = 5$ .

Tabla 3.8: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = x+y$ ,  
 $g = x + y$  y  $m = 5$

1	$1\delta_{0,99999,1}$
2	$1\delta_{1,1}$
3	$1\delta_{1,1}$
4	$1\delta_{1,0,99999}$
5	$1\delta_{1,1}$
6	$1\delta_{1,1}$
7	$1\delta_{0,99999,1}$
8	$1\delta_{0,99999,1}$
9	$1\delta_{0,99999,1}$
10	$1\delta_{0,99999,1}$
11	$1\delta_{1,0,99998}$
12	$1\delta_{1,0,99998}$
13	$1\delta_{1,1}$
14	$1\delta_{1,1}$
15	$1\delta_{1,1}$
16	$1\delta_{1,1}$
17	$1\delta_{1,1}$
18	$1\delta_{1,1}$
19	$1\delta_{1,1}$
20	$1\delta_{1,1}$

21	$1\delta_{1,1}$
22	$1\delta_{1,1}$
23	$1\delta_{1,0,99999}$
24	$1\delta_{1,0,99999}$
25	$1\delta_{1,1}$
26	$1\delta_{1,1}$
27	$1\delta_{1,1}$
28	$1\delta_{1,1}$
29	$1\delta_{0,99997,0,99998}$
30	$1\delta_{1,1}$
31	$1\delta_{1,0,99999}$
32	$1\delta_{0,99999,0,99996}$
33	$1\delta_{0,99999,1}$
34	$1\delta_{0,99999,1}$
35	$1\delta_{0,99999,1}$
36	$1\delta_{0,99999,1}$
37	$1\delta_{1,1}$
38	$1\delta_{0,99999,0,99999}$
39	$1\delta_{0,99999,0,99999}$
40	$1\delta_{1,1}$
41	$1\delta_{1,0,99999}$
42	$1\delta_{1,0,99999}$
43	$1\delta_{1,0,99999}$
44	$1\delta_{1,0,99999}$
45	$1\delta_{1,1}$
46	$1\delta_{1,1}$
47	$1\delta_{1,1}$
48	$1\delta_{1,1}$
49	$1\delta_{0,99998,0,99999}$
50	$1\delta_{1,1}$
51	$1\delta_{1,1}$
52	$1\delta_{0,99999,0,99998}$
53	$1\delta_{0,99999,1}$

54	$1\delta_{0,99999,1}$
55	$1\delta_{1,0,99999}$
56	$1\delta_{1,0,99999}$
57	$1\delta_{1,0,99999}$
58	$1\delta_{1,1}$
59	$1\delta_{1,1}$
60	$1\delta_{1,0,99999}$
61	$1\delta_{0,99997,0,99999}$
62	$1\delta_{1,1}$
63	$1\delta_{1,1}$
64	$1\delta_{0,99999,0,99998}$
65	$1\delta_{0,99999,1}$
66	$1\delta_{0,99999,1}$
67	$1\delta_{1,0,99999}$
68	$1\delta_{1,0,99999}$
69	$1\delta_{1,1}$
70	$1\delta_{1,1}$
71	$1\delta_{1,1}$
72	$1\delta_{1,1}$
73	$1\delta_{0,99999,0,99999}$
74	$1\delta_{1,1}$
75	$1\delta_{1,0,99999}$
76	$1\delta_{1,0,99998}$
77	$1\delta_{0,99999,1}$
78	$1\delta_{1,1}$
79	$1\delta_{1,1}$
80	$1\delta_{1,0,99999}$
81	$1\delta_{1,1}$
82	$1\delta_{1,1}$
83	$1\delta_{1,1}$
84	$1\delta_{1,1}$
85	$1\delta_{1,0,99999}$
86	$1\delta_{1,0,99999}$

87	$1\delta_{1,1}$
88	$1\delta_{1,1}$
89	$1\delta_{0,99999,1}$
90	$1\delta_{1,1}$
91	$1\delta_{1,1}$
92	$1\delta_{1,0,99999}$
93	$1\delta_{1,0,99999}$
94	$1\delta_{1,1}$
95	$1\delta_{1,1}$
96	$1\delta_{1,1}$
97	$1\delta_{1,1}$
98	$1\delta_{1,0,99998}$
99	$1\delta_{0,99998,1}$
100	$1\delta_{1,1}$

### 3.4.5. Ejemplo 5

Ahora tomamos la función (3.68) con condiciones  $h(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = 1$ . La tabla 3.9 muestra la medida óptima para 36 elementos.

Tabla 3.9: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = 0$ ,  $g = 1$  y  $m = 3$

1	$1\delta_{1,1}$
2	$1\delta_{-1,-1}$
3	$0,045378\delta_{1,1} + 0,95462\delta_{-1,-1}$
4	$0,044881\delta_{-1,-1} + 0,95512\delta_{1,1}$
5	$0,28038\delta_{-1,-1} + 0,71962\delta_{1,1}$
6	$0,011893\delta_{-1,-1} + 0,98811\delta_{1,1}$
7	$0,051116\delta_{-1,-1} + 0,94888\delta_{1,1}$
8	$0,29889\delta_{-1,-1} + 0,70111\delta_{1,1}$
9	$0,37763\delta_{-1,-1} + 0,62237\delta_{1,1}$



10	$0,43682\delta_{-1,-1} + 0,56318\delta_{1,1}$
11	$0,43706\delta_{-1,-1} + 0,56294\delta_{1,1}$
12	$0,37785\delta_{-1,-1} + 0,62215\delta_{1,1}$
13	$0,012241\delta_{1,1} + 0,98776\delta_{-1,-1}$
14	$0,28072\delta_{1,1} + 0,71928\delta_{-1,-1}$
15	$0,29883\delta_{1,1} + 0,70117\delta_{-1,-1}$
16	$0,051051\delta_{1,1} + 0,94895\delta_{-1,-1}$
17	$0,041413\delta_{-1,-1} + 0,95859\delta_{1,1}$
18	$0,041376\delta_{1,1} + 0,95862\delta_{-1,-1}$
19	$0,99043\delta_{-1,-1}$
20	$0,99011\delta_{1,1}$
21	$0,29771\delta_{-1,-1} + 0,70229\delta_{1,1}$
22	$0,24546\delta_{-1,-1} + 0,75454\delta_{1,1}$
23	$0,22224\delta_{-1,-1} + 0,77776\delta_{1,1}$
24	$0,27931\delta_{-1,-1} + 0,72069\delta_{1,1}$
25	$0,43706\delta_{1,1} + 0,56294\delta_{-1,-1}$
26	$0,37785\delta_{1,1} + 0,62215\delta_{-1,-1}$
27	$0,37763\delta_{1,1} + 0,62237\delta_{-1,-1}$
28	$0,43682\delta_{1,1} + 0,56318\delta_{-1,-1}$
29	$0,24553\delta_{1,1} + 0,75447\delta_{-1,-1}$
30	$0,29779\delta_{1,1} + 0,70221\delta_{-1,-1}$
31	$0,27895\delta_{1,1} + 0,72105\delta_{-1,-1}$
32	$0,22187\delta_{1,1} + 0,77813\delta_{-1,-1}$
33	$0,1547\delta_{-1,-1} + 0,8453\delta_{1,1}$
34	$0,15447\delta_{1,1} + 0,84553\delta_{-1,-1}$
35	$0,048892\delta_{1,1} + 0,95111\delta_{-1,-1}$
36	$0,049895\delta_{-1,-1} + 0,9501\delta_{1,1}$

La tabla 3.10 muestra la solución cuando  $m = 5$  (100 elementos).

Tabla 3.10: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = 1$  y  $m = 5$

1	$1\delta_{1,1}$
2	$1\delta_{1,1}$
3	$1\delta_{1,1}$
4	$1\delta_{1,1}$
5	$1\delta_{1,1}$
6	$1\delta_{1,1}$
7	$1\delta_{1,1}$
8	$1\delta_{1,1}$
9	$1\delta_{1,1}$
10	$1\delta_{1,1}$
11	$0,99301\delta_{1,1}$
12	$0,08866\delta_{-1,-1} + 0,91134\delta_{1,1}$
13	$0,030265\delta_{-1,-1} + 0,96973\delta_{1,1}$
14	$0,29193\delta_{-1,-1} + 0,70807\delta_{1,1}$
15	$0,3497\delta_{-1,-1} + 0,6503\delta_{1,1}$
16	$0,15562\delta_{-1,-1} + 0,84438\delta_{1,1}$
17	$0,28437\delta_{-1,-1} + 0,71563\delta_{1,1}$
18	$0,37283\delta_{-1,-1} + 0,62717\delta_{1,1}$
19	$0,3738\delta_{-1,-1} + 0,6262\delta_{1,1}$
20	$0,28533\delta_{-1,-1} + 0,71467\delta_{1,1}$
21	$1\delta_{-1,-1}$
22	$1\delta_{-1,-1}$
23	$0,061514\delta_{1,1} + 0,93849\delta_{-1,-1}$
24	$0,029642\delta_{1,1} + 0,97036\delta_{-1,-1}$
25	$0,32311\delta_{-1,-1} + 0,67689\delta_{1,1}$
26	$1\delta_{-1,-1}$
27	$0,99307\delta_{-1,-1}$
28	$0,33504\delta_{-1,-1} + 0,66496\delta_{1,1}$
29	$1\delta_{1,1}$
30	$0,48611\delta_{1,1} + 0,51389\delta_{-1,-1}$

31	$0,48525\delta_{1,1} + 0,51475\delta_{-1,-1}$
32	$1\delta_{1,1}$
33	$0,14371\delta_{-1,-1} + 0,85629\delta_{1,1}$
34	$0,27051\delta_{-1,-1} + 0,72949\delta_{1,1}$
35	$0,26884\delta_{-1,-1} + 0,73116\delta_{1,1}$
36	$0,14068\delta_{-1,-1} + 0,85932\delta_{1,1}$
37	$0,15528\delta_{-1,-1} + 0,84472\delta_{1,1}$
38	$0,36413\delta_{-1,-1} + 0,63587\delta_{1,1}$
39	$0,31512\delta_{-1,-1} + 0,68488\delta_{1,1}$
40	$0,033024\delta_{-1,-1} + 0,96698\delta_{1,1}$
41	$0,2264\delta_{1,1} + 0,7736\delta_{-1,-1}$
42	$1\delta_{-1,-1}$
43	$0,099859\delta_{1,1} + 0,90014\delta_{-1,-1}$
44	$0,32851\delta_{1,1} + 0,67149\delta_{-1,-1}$
45	$0,28433\delta_{1,1} + 0,71567\delta_{-1,-1}$
46	$0,12902\delta_{1,1} + 0,87098\delta_{-1,-1}$
47	$0,1688\delta_{1,1} + 0,8312\delta_{-1,-1}$
48	$0,30723\delta_{1,1} + 0,69277\delta_{-1,-1}$
49	$0,26546\delta_{-1,-1} + 0,73454\delta_{1,1}$
50	$0,12364\delta_{1,1} + 0,87636\delta_{-1,-1}$
51	$0,10919\delta_{1,1} + 0,89081\delta_{-1,-1}$
52	$0,25755\delta_{-1,-1} + 0,74245\delta_{1,1}$
53	$0,094551\delta_{-1,-1} + 0,90545\delta_{1,1}$
54	$0,4534\delta_{-1,-1} + 0,5466\delta_{1,1}$
55	$0,44453\delta_{-1,-1} + 0,55547\delta_{1,1}$
56	$0,016665\delta_{-1,-1} + 0,98333\delta_{1,1}$
57	$0,098063\delta_{-1,-1} + 0,90194\delta_{1,1}$
58	$0,29115\delta_{-1,-1} + 0,70885\delta_{1,1}$
59	$0,16533\delta_{-1,-1} + 0,83467\delta_{1,1}$
60	$1\delta_{1,1}$
61	$0,32235\delta_{1,1} + 0,67765\delta_{-1,-1}$
62	$0,032539\delta_{1,1} + 0,96746\delta_{-1,-1}$
63	$0,15505\delta_{1,1} + 0,84495\delta_{-1,-1}$

64	$0,36947\delta_{1,1} + 0,63053\delta_{-1,-1}$
65	$0,40627\delta_{1,1} + 0,59373\delta_{-1,-1}$
66	$0,15398\delta_{1,1} + 0,84602\delta_{-1,-1}$
67	$0,1532\delta_{1,1} + 0,8468\delta_{-1,-1}$
68	$0,40545\delta_{1,1} + 0,59455\delta_{-1,-1}$
69	$0,36567\delta_{1,1} + 0,63433\delta_{-1,-1}$
70	$0,17365\delta_{1,1} + 0,82635\delta_{-1,-1}$
71	$0,12989\delta_{1,1} + 0,87011\delta_{-1,-1}$
72	$0,34705\delta_{1,1} + 0,65295\delta_{-1,-1}$
73	$0,17805\delta_{-1,-1} + 0,82195\delta_{1,1}$
74	$0,13098\delta_{1,1} + 0,86902\delta_{-1,-1}$
75	$0,038198\delta_{1,1} + 0,9618\delta_{-1,-1}$
76	$0,097336\delta_{-1,-1} + 0,90266\delta_{1,1}$
77	$0,043116\delta_{-1,-1} + 0,95688\delta_{1,1}$
78	$0,29576\delta_{-1,-1} + 0,70424\delta_{1,1}$
79	$0,13259\delta_{-1,-1} + 0,86741\delta_{1,1}$
80	$1\delta_{1,1}$
81	$0,37331\delta_{1,1} + 0,62669\delta_{-1,-1}$
82	$0,28533\delta_{1,1} + 0,71467\delta_{-1,-1}$
83	$0,28438\delta_{1,1} + 0,71562\delta_{-1,-1}$
84	$0,37233\delta_{1,1} + 0,62767\delta_{-1,-1}$
85	$0,36962\delta_{1,1} + 0,63038\delta_{-1,-1}$
86	$0,15531\delta_{1,1} + 0,84469\delta_{-1,-1}$
87	$0,029575\delta_{1,1} + 0,97042\delta_{-1,-1}$
88	$0,31918\delta_{1,1} + 0,68082\delta_{-1,-1}$
89	$0,33733\delta_{1,1} + 0,66267\delta_{-1,-1}$
90	$0,099303\delta_{1,1} + 0,9007\delta_{-1,-1}$
91	$1\delta_{-1,-1}$
92	$0,23622\delta_{1,1} + 0,76378\delta_{-1,-1}$
93	$0,28698\delta_{1,1} + 0,71302\delta_{-1,-1}$
94	$0,065391\delta_{1,1} + 0,93461\delta_{-1,-1}$
95	$1\delta_{-1,-1}$
96	$0,12788\delta_{1,1} + 0,87212\delta_{-1,-1}$

97	$0,0451\delta_{-1,-1} + 0,9549\delta_{1,1}$
98	$0,044101\delta_{1,1} + 0,9559\delta_{-1,-1}$
99	$1\delta_{-1,-1}$
100	$1\delta_{-1,-1}$

### 3.4.6. Ejemplo 6

Ahora tomamos  $h(x, y) = x + y$ ,  $g(x, y) = 1$  y  $m = 3$ . La tabla 3.11 muestra los resultados de la medida optima.

Tabla 3.11: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = x + y$ ,  $g = 1$  y  $m = 3$

1	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
2	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
3	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
4	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
5	$0,57283\delta_{-1,-1} + 0,57283\delta_{1,1}$
6	$0,42734\delta_{-1,-1} + 0,57266\delta_{1,1}$
7	$0,42799\delta_{-1,-1} + 0,57201\delta_{1,1}$
8	$0,57199\delta_{-1,-1} + 0,57199\delta_{1,1}$
9	$0,58073\delta_{-1,-1} + 0,58073\delta_{1,1}$
10	$0,48732\delta_{-1,-1} + 0,51268\delta_{1,1}$
11	$0,48715\delta_{-1,-1} + 0,51285\delta_{1,1}$
12	$0,58055\delta_{-1,-1} + 0,58055\delta_{1,1}$
13	$0,42717\delta_{-1,-1} + 0,57283\delta_{1,1}$
14	$0,57266\delta_{-1,-1} + 0,57266\delta_{1,1}$
15	$0,57201\delta_{-1,-1} + 0,57201\delta_{1,1}$
16	$0,42801\delta_{-1,-1} + 0,57199\delta_{1,1}$
17	$0,43299\delta_{-1,-1} + 0,56701\delta_{1,1}$
18	$0,43299\delta_{-1,-1} + 0,56701\delta_{1,1}$
19	$0,43299\delta_{-1,-1} + 0,56701\delta_{1,1}$

20	$0,43299\delta_{-1,-1} + 0,56701\delta_{1,1}$
21	$0,57201\delta_{-1,-1} + 0,57201\delta_{1,1}$
22	$0,42801\delta_{-1,-1} + 0,57199\delta_{1,1}$
23	$0,42717\delta_{-1,-1} + 0,57283\delta_{1,1}$
24	$0,57266\delta_{-1,-1} + 0,57266\delta_{1,1}$
25	$0,48715\delta_{-1,-1} + 0,51285\delta_{1,1}$
26	$0,58055\delta_{-1,-1} + 0,58055\delta_{1,1}$
27	$0,58074\delta_{-1,-1} + 0,58074\delta_{1,1}$
28	$0,48732\delta_{-1,-1} + 0,51268\delta_{1,1}$
29	$0,42799\delta_{-1,-1} + 0,57201\delta_{1,1}$
30	$0,57199\delta_{-1,-1} + 0,57199\delta_{1,1}$
31	$0,57283\delta_{-1,-1} + 0,57283\delta_{1,1}$
32	$0,42734\delta_{-1,-1} + 0,57266\delta_{1,1}$
33	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
34	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
35	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$
36	$0,5\delta_{-1,-1} + 0,5\delta_{1,1}$

Y la tabla 3.12 muestra la medida óptima con  $m = 5$ .

Tabla 3.12: medida para polinomio(3.68) cuando  $h = x + y$ ,  $g = 1$  y  $m = 5$

1	$0,49668\delta_{-1,-1} + 0,50332\delta_{1,1}$
2	$0,50328\delta_{-1,-1} + 0,50328\delta_{1,1}$
3	$0,50328\delta_{-1,-1} + 0,50328\delta_{1,1}$
4	$0,49668\delta_{-1,-1} + 0,50332\delta_{1,1}$
5	$0,67089\delta_{-1,-1} + 0,67089\delta_{1,1}$
6	$0,32247\delta_{-1,-1} + 0,67753\delta_{1,1}$
7	$0,3287\delta_{-1,-1} + 0,6713\delta_{1,1}$
8	$0,66468\delta_{-1,-1} + 0,66468\delta_{1,1}$
9	$0,68639\delta_{-1,-1} + 0,68639\delta_{1,1}$

10	$0,58859\delta_{-1,-1} + 0,58859\delta_{1,1}$
11	$0,58291\delta_{-1,-1} + 0,58291\delta_{1,1}$
12	$0,67475\delta_{-1,-1} + 0,67475\delta_{1,1}$
13	$0,73181\delta_{-1,0} + 0,73181\delta_{0,1}$
14	$0,49392\delta_{-1,0} + 0,50608\delta_{0,1}$
15	$0,49393\delta_{-1,-1} + 0,50607\delta_{1,1}$
16	$0,71004\delta_{-1,-1} + 0,71004\delta_{1,1}$
17	$0,66762\delta_{-1,-1} + 0,66762\delta_{1,1}$
18	$0,53633\delta_{-1,-1} + 0,53633\delta_{1,1}$
19	$0,53553\delta_{-1,-1} + 0,53553\delta_{1,1}$
20	$0,66686\delta_{-1,-1} + 0,66686\delta_{1,1}$
21	$0,40433\delta_{-1,-1} + 0,59567\delta_{1,1}$
22	$0,60228\delta_{-1,-1} + 0,60228\delta_{1,1}$
23	$0,60051\delta_{-1,-1} + 0,60051\delta_{1,1}$
24	$0,4063\delta_{-1,-1} + 0,5937\delta_{1,1}$
25	$0,23394\delta_{-1,-1} + 0,76606\delta_{1,1}$
26	$0,38047\delta_{-1,-1} + 0,61953\delta_{1,1}$
27	$0,38047\delta_{-1,-1} + 0,61953\delta_{1,1}$
28	$0,23395\delta_{-1,-1} + 0,76605\delta_{1,1}$
29	$0,5637\delta_{-1,-1} + 0,5637\delta_{1,1}$
30	$0,22218\delta_{-1,-1} + 0,77782\delta_{1,1}$
31	$0,22111\delta_{-1,-1} + 0,77889\delta_{1,1}$
32	$0,56369\delta_{-1,-1} + 0,56369\delta_{1,1}$
33	$0,57922\delta_{-1,-1} + 0,57922\delta_{1,1}$
34	$0,45491\delta_{-1,-1} + 0,54509\delta_{1,1}$
35	$0,45449\delta_{-1,-1} + 0,54551\delta_{1,1}$
36	$0,57876\delta_{-1,-1} + 0,57876\delta_{1,1}$
37	$0,71019\delta_{-1,-1} + 0,71019\delta_{1,1}$
38	$0,49561\delta_{-1,-1} + 0,50439\delta_{1,1}$
39	$0,49457\delta_{0,-1} + 0,50543\delta_{1,0}$
40	$0,73078\delta_{0,-1} + 0,73078\delta_{1,0}$
41	$0,44683\delta_{-1,-1} + 0,55317\delta_{1,1}$
42	$0,68985\delta_{-1,-1} + 0,68985\delta_{1,1}$

43	$0,6781\delta_{-1,-1} + 0,6781\delta_{1,1}$
44	$0,45046\delta_{-1,-1} + 0,54954\delta_{1,1}$
45	$0,33287\delta_{-1,-1} + 0,66713\delta_{1,1}$
46	$0,46638\delta_{-1,-1} + 0,53362\delta_{1,1}$
47	$0,46676\delta_{-1,-1} + 0,53324\delta_{1,1}$
48	$0,3338\delta_{-1,-1} + 0,6662\delta_{1,1}$
49	$0,26509\delta_{-1,-1} + 0,73491\delta_{1,1}$
50	$0,34699\delta_{-1,-1} + 0,65301\delta_{1,1}$
51	$0,34698\delta_{-1,-1} + 0,65302\delta_{1,1}$
52	$0,26508\delta_{-1,-1} + 0,73492\delta_{1,1}$
53	$0,51272\delta_{-1,-1} + 0,51272\delta_{1,1}$
54	$0,27415\delta_{-1,-1} + 0,72585\delta_{1,1}$
55	$0,27219\delta_{-1,-1} + 0,72781\delta_{1,1}$
56	$0,51265\delta_{-1,-1} + 0,51265\delta_{1,1}$
57	$0,67592\delta_{-1,-1} + 0,67592\delta_{1,1}$
58	$0,47858\delta_{-1,-1} + 0,52142\delta_{1,1}$
59	$0,47686\delta_{-1,-1} + 0,52314\delta_{1,1}$
60	$0,68724\delta_{-1,-1} + 0,68724\delta_{1,1}$
61	$0,49925\delta_{0,-1} + 0,50075\delta_{1,0}$
62	$0,73061\delta_{0,-1} + 0,73061\delta_{1,0}$
63	$0,71006\delta_{-1,-1} + 0,71006\delta_{1,1}$
64	$0,49989\delta_{-1,-1} + 0,50011\delta_{1,1}$
65	$0,38447\delta_{-1,-1} + 0,61553\delta_{1,1}$
66	$0,5841\delta_{-1,-1} + 0,5841\delta_{1,1}$
67	$0,58454\delta_{-1,-1} + 0,58454\delta_{1,1}$
68	$0,38491\delta_{-1,-1} + 0,61509\delta_{1,1}$
69	$0,33089\delta_{-1,-1} + 0,66911\delta_{1,1}$
70	$0,46671\delta_{-1,-1} + 0,53329\delta_{1,1}$
71	$0,46682\delta_{-1,-1} + 0,53318\delta_{1,1}$
72	$0,33044\delta_{-1,-1} + 0,66956\delta_{1,1}$
73	$0,34013\delta_{-1,-1} + 0,65987\delta_{1,1}$
74	$0,37665\delta_{-1,-1} + 0,62335\delta_{1,1}$
75	$0,37665\delta_{-1,-1} + 0,62335\delta_{1,1}$



76	$0,34012\delta_{-1,-1} + 0,65988\delta_{1,1}$
77	$0,61308\delta_{-1,-1} + 0,61308\delta_{1,1}$
78	$0,38302\delta_{-1,-1} + 0,61698\delta_{1,1}$
79	$0,38021\delta_{-1,-1} + 0,61979\delta_{1,1}$
80	$0,61553\delta_{-1,-1} + 0,61553\delta_{1,1}$
81	$0,53531\delta_{-1,-1} + 0,53531\delta_{1,1}$
82	$0,66686\delta_{-1,-1} + 0,66686\delta_{1,1}$
83	$0,66763\delta_{-1,-1} + 0,66763\delta_{1,1}$
84	$0,5361\delta_{-1,-1} + 0,5361\delta_{1,1}$
85	$0,49972\delta_{-1,-1} + 0,50028\delta_{1,1}$
86	$0,7099\delta_{-1,-1} + 0,7099\delta_{1,1}$
87	$0,73165\delta_{-1,0} + 0,73165\delta_{0,1}$
88	$0,50031\delta_{-1,0} + 0,50031\delta_{0,1}$
89	$0,45086\delta_{-1,-1} + 0,54914\delta_{1,1}$
90	$0,67836\delta_{-1,-1} + 0,67836\delta_{1,1}$
91	$0,69074\delta_{-1,-1} + 0,69074\delta_{1,1}$
92	$0,44783\delta_{-1,-1} + 0,55217\delta_{1,1}$
93	$0,40296\delta_{-1,-1} + 0,59704\delta_{1,1}$
94	$0,60084\delta_{-1,-1} + 0,60084\delta_{1,1}$
95	$0,60294\delta_{-1,-1} + 0,60294\delta_{1,1}$
96	$0,40126\delta_{-1,-1} + 0,59874\delta_{1,1}$
97	$0,49834\delta_{-1,-1} + 0,50166\delta_{1,1}$
98	$0,50167\delta_{-1,-1} + 0,50167\delta_{1,1}$
99	$0,50167\delta_{-1,-1} + 0,50167\delta_{1,1}$
100	$0,49834\delta_{-1,-1} + 0,50166\delta_{1,1}$

### 3.4.7. Ejemplo 7

Ahora analicemos el polinomio no convexo:

$$f(x, y) = 1 - 2\sqrt{3}xy - x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \quad (3.69)$$

con  $h(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = 0$ . La table 3.13 muestra la medida para  $m = 5$ .

Tabla 3.13: medida para polinomio(3.69) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = 0$  y  $m = 5$

1	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
2	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
3	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
4	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
5	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
6	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
7	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
8	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
9	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
10	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
11	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
12	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
13	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
14	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
15	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
16	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
17	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
18	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
19	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
20	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
21	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
22	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
23	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
24	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
25	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
26	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
27	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
28	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
29	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
30	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$

31	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
32	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
33	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
34	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
35	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
36	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
37	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
38	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
39	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
40	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
41	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
42	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
43	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
44	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
45	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
46	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
47	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
48	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
49	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
50	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
51	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
52	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
53	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
54	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
55	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
56	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
57	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
58	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
59	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
60	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
61	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
62	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
63	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$

64	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
65	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
66	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
67	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
68	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
69	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
70	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
71	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
72	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
73	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
74	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
75	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
76	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
77	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
78	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
79	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
80	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
81	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
82	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
83	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
84	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
85	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
86	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
87	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
88	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
89	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
90	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
91	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
92	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
93	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
94	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
95	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
96	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$

97	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
98	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
99	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$
100	$0,5\delta_{-0,8665,-0,50064} + 0,5\delta_{0,8665,0,50064}$

### 3.4.8. Ejemplo 8

La tabla 3.14 muestra el resultado para  $h(x, y) = \sqrt{3}x/2 + y/2$ ,  $g(x, y) = \sqrt{3}x/2 + y/2$  y  $m = 5$ . Como se puede observar este es un caso completamente convexo porque la medida está soportada solamente en una delta.

Tabla 3.14: medida para polinomio(3.69) cuando  $h = \sqrt{3}x/2 + y/2$ ,  $g = \sqrt{3}x/2 + y/2$  y  $N = 5$

1	$1\delta_{0,86603,0,5}$
2	$1\delta_{0,86603,0,5}$
3	$1\delta_{0,86602,0,5}$
4	$1\delta_{0,86602,0,5}$
5	$1\delta_{0,86603,0,5}$
6	$1\delta_{0,86602,0,5}$
7	$1\delta_{0,86603,0,5}$
8	$1\delta_{0,86603,0,5}$
9	$1\delta_{0,86603,0,5}$
10	$1\delta_{0,86603,0,5}$
11	$1\delta_{0,86603,0,5}$
12	$1\delta_{0,86603,0,5}$
13	$1\delta_{0,86603,0,5}$
14	$1\delta_{0,86602,0,5}$
15	$1\delta_{0,86602,0,5}$
16	$1\delta_{0,86603,0,5}$
17	$1\delta_{0,86603,0,5}$
18	$1\delta_{0,86603,0,5}$

19	$1\delta_{0,86603,0,5}$
20	$1\delta_{0,86603,0,5}$
21	$1\delta_{0,86602,0,5}$
22	$1\delta_{0,86602,0,5}$
23	$1\delta_{0,86602,0,5}$
24	$1\delta_{0,86603,0,5}$
25	$1\delta_{0,86603,0,5}$
26	$1\delta_{0,86603,0,5}$
27	$1\delta_{0,86603,0,5}$
28	$1\delta_{0,86603,0,5}$
29	$1\delta_{0,86603,0,5}$
30	$1\delta_{0,86602,0,5}$
31	$1\delta_{0,86602,0,5}$
32	$1\delta_{0,86603,0,5}$
33	$1\delta_{0,86602,0,5}$
34	$1\delta_{0,86603,0,5}$
35	$1\delta_{0,86603,0,5}$
36	$1\delta_{0,86602,0,5}$
37	$1\delta_{0,86603,0,5}$
38	$1\delta_{0,86603,0,5}$
39	$1\delta_{0,86603,0,5}$
40	$1\delta_{0,86603,0,5}$
41	$1\delta_{0,86602,0,5}$
42	$1\delta_{0,86602,0,5}$
43	$1\delta_{0,86602,0,5}$
44	$1\delta_{0,86603,0,5}$
45	$1\delta_{0,86603,0,5}$
46	$1\delta_{0,86603,0,5}$
47	$1\delta_{0,86603,0,5}$
48	$1\delta_{0,86603,0,5}$
49	$1\delta_{0,86602,0,5}$
50	$1\delta_{0,86603,0,5}$
51	$1\delta_{0,86602,0,5}$

52	$1\delta_{0,86602,0,5}$
53	$1\delta_{0,86603,0,5}$
54	$1\delta_{0,86603,0,5}$
55	$1\delta_{0,86603,0,5}$
56	$1\delta_{0,86602,0,5}$
57	$1\delta_{0,86603,0,5}$
58	$1\delta_{0,86603,0,5}$
59	$1\delta_{0,86603,0,5}$
60	$1\delta_{0,86603,0,5}$
61	$1\delta_{0,86602,0,5}$
62	$1\delta_{0,86603,0,5}$
63	$1\delta_{0,86603,0,5}$
64	$1\delta_{0,86603,0,5}$
65	$1\delta_{0,86603,0,5}$
66	$1\delta_{0,86603,0,5}$
67	$1\delta_{0,86603,0,5}$
68	$1\delta_{0,86603,0,5}$
69	$1\delta_{0,86602,0,5}$
70	$1\delta_{0,86602,0,5}$
71	$1\delta_{0,86602,0,5}$
72	$1\delta_{0,86602,0,5}$
73	$1\delta_{0,86603,0,5}$
74	$1\delta_{0,86603,0,5}$
75	$1\delta_{0,86603,0,5}$
76	$1\delta_{0,86603,0,5}$
77	$1\delta_{0,86603,0,5}$
78	$1\delta_{0,86602,0,5}$
79	$1\delta_{0,86602,0,5}$
80	$1\delta_{0,86603,0,5}$
81	$1\delta_{0,86603,0,5}$
82	$1\delta_{0,86603,0,5}$
83	$1\delta_{0,86603,0,5}$
84	$1\delta_{0,86603,0,5}$

85	$1\delta_{0,86603,0,5}$
86	$1\delta_{0,86603,0,5}$
87	$1\delta_{0,86603,0,5}$
88	$1\delta_{0,86602,0,5}$
89	$1\delta_{0,86602,0,5}$
90	$1\delta_{0,86602,0,5}$
91	$1\delta_{0,86603,0,5}$
92	$1\delta_{0,86602,0,5}$
93	$1\delta_{0,86603,0,5}$
94	$1\delta_{0,86603,0,5}$
95	$1\delta_{0,86603,0,5}$
96	$1\delta_{0,86603,0,5}$
97	$1\delta_{0,86602,0,5}$
98	$1\delta_{0,86602,0,5}$
99	$1\delta_{0,86603,0,5}$
100	$1\delta_{0,86603,0,5}$

### 3.4.9. Ejemplo 9

Asumimos  $h(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 1$  y  $m = 5$ . La tabla 3.15 muestra la medida óptima para el polinomio 3.69. En esta tabla se puede observar que en algunos casos se presenta convexidad, mientras en otros no.

Tabla 3.15: medida para polinomio(3.69) cuando  $h = 0$ ,  
 $g = 1$  y  $m = 5$

1	$1\delta_{0,1,6314}$
2	$1\delta_{-1,6314,0}$
3	$1\delta_{-1,621,-0,010496}$
4	$1\delta_{0,010496,1,621}$
5	$1\delta_{0,1,934}$
6	$1\delta_{-0,31306,1,621}$



7	$1\delta_{-0,1115,1,4194}$
8	$1\delta_{0,20155,1,7325}$
9	$1\delta_{0,1,741}$
10	$1\delta_{-0,0085744,1,7325}$
11	$1\delta_{0,64248,1,0814}$
12	$1\delta_{0,65105,1,09}$
13	$1\delta_{0,1,5844}$
14	$1\delta_{-0,49442,1,09}$
15	$0,29615\delta_{0,86603,0,5} + 0,70385\delta_{-0,86603,-0,5}$
16	$1\delta_{0,79297,0,79143}$
17	$1\delta_{0,1,245}$
18	$0,49158\delta_{0,86603,0,5} + 0,50842\delta_{-0,86603,-0,5}$
19	$0,13146\delta_{0,86603,0,5} + 0,86854\delta_{-0,86603,-0,5}$
20	$1\delta_{1,245,0}$
21	$1\delta_{-1,621,0,1521}$
22	$1\delta_{-1,7731,0}$
23	$1\delta_{-1,3117,-0,46134}$
24	$1\delta_{-1,1596,-0,30924}$
25	$0,22052\delta_{0,86603,0,5} + 0,77948\delta_{-0,86603,-0,5}$
26	$1\delta_{-1,2975,-0,30924}$
27	$1\delta_{-0,56843,-1,0383}$
28	$0,19123\delta_{0,86603,0,5} + 0,80877\delta_{-0,86603,-0,5}$
29	$1\delta_{0,64248,1,1735}$
30	$0,36366\delta_{0,86603,0,5} + 0,63634\delta_{-0,86603,-0,5}$
31	$0,48138\delta_{0,86603,0,5} + 0,51862\delta_{-0,86603,-0,5}$
32	$1\delta_{1,2518,0,5642}$
33	$1\delta_{0,29855,1,2494}$
34	$0,46061\delta_{0,86603,0,5} + 0,53939\delta_{-0,86603,-0,5}$
35	$0,33034\delta_{0,86603,0,5} + 0,66966\delta_{-0,86603,-0,5}$
36	$1\delta_{1,2056,0,34237}$
37	$1\delta_{0,79143,0,79403}$
38	$0,26642\delta_{0,86603,0,5} + 0,73358\delta_{-0,86603,-0,5}$
39	$1\delta_{1,1338,-0,45167}$

40	$1\delta_{1,5855,0}$
41	$1\delta_{-1,3117,0,37022}$
42	$1\delta_{-1,6819,0}$
43	$1\delta_{-1,1445,-0,53743}$
44	$0,11294\delta_{0,86603,0,5} + 0,88706\delta_{-0,86603,-0,5}$
45	$0,33258\delta_{0,86603,0,5} + 0,66742\delta_{-0,86603,-0,5}$
46	$1\delta_{-1,3177,-0,16722}$
47	$1\delta_{-0,45681,-1,0281}$
48	$0,43787\delta_{0,86603,0,5} + 0,56213\delta_{-0,86603,-0,5}$
49	$1\delta_{0,22597,0,94127}$
50	$1\delta_{-0,99414,-0,27884}$
51	$1\delta_{-0,11985,-1,1531}$
52	$1\delta_{1,1003,0,066976}$
53	$1\delta_{0,52038,0,94444}$
54	$0,358\delta_{0,86603,0,5} + 0,642\delta_{-0,86603,-0,5}$
55	$0,44965\delta_{0,86603,0,5} + 0,55035\delta_{-0,86603,-0,5}$
56	$1\delta_{1,3635,0,10136}$
57	$1\delta_{1,1338,0,54395}$
58	$0,16491\delta_{0,86603,0,5} + 0,83509\delta_{-0,86603,-0,5}$
59	$1\delta_{1,2352,-0,44259}$
60	$1\delta_{1,6777,0}$
61	$1\delta_{-1,1445,0,4415}$
62	$1\delta_{-1,586,0}$
63	$1\delta_{-0,79312,-0,79288}$
64	$0,25895\delta_{0,86603,0,5} + 0,74105\delta_{-0,86603,-0,5}$
65	$0,37438\delta_{0,86603,0,5} + 0,62562\delta_{-0,86603,-0,5}$
66	$1\delta_{-1,1884,-0,35138}$
67	$1\delta_{-0,27775,-1,262}$
68	$0,4092\delta_{0,86603,0,5} + 0,5908\delta_{-0,86603,-0,5}$
69	$0,4832\delta_{0,86603,0,5} + 0,5168\delta_{-0,86603,-0,5}$
70	$1\delta_{-0,92422,-0,53043}$
71	$1\delta_{-0,072138,-1,3825}$
72	$0,16153\delta_{0,86603,0,5} + 0,83847\delta_{-0,86603,-0,5}$

73	$0,11671\delta_{0,86603,0,5} + 0,88329\delta_{-0,86603,-0,5}$
74	$0,95673\delta_{-0,79772,-0,57815}$
75	$1\delta_{0,029566,-1,3299}$
76	$1\delta_{1,2378,-0,12172}$
77	$1\delta_{1,2352,0,46701}$
78	$0,22455\delta_{0,86603,0,5} + 0,77545\delta_{-0,86603,-0,5}$
79	$1\delta_{1,1134,-0,58873}$
80	$1\delta_{1,7022,0}$
81	$0,13015\delta_{0,86603,0,5} + 0,86985\delta_{-0,86603,-0,5}$
82	$1\delta_{-1,245,0}$
83	$1\delta_{0,-1,245}$
84	$0,49414\delta_{0,86603,0,5} + 0,50586\delta_{-0,86603,-0,5}$
85	$0,30975\delta_{0,86603,0,5} + 0,69025\delta_{-0,86603,-0,5}$
86	$1\delta_{-0,79174,-0,79312}$
87	$1\delta_{0,-1,5849}$
88	$1\delta_{0,51399,-1,0709}$
89	$0,31226\delta_{0,86603,0,5} + 0,68774\delta_{-0,86603,-0,5}$
90	$1\delta_{-0,5897,-1,0709}$
91	$1\delta_{0,-1,6606}$
92	$1\delta_{0,51757,-1,143}$
93	$0,34884\delta_{0,86603,0,5} + 0,65116\delta_{-0,86603,-0,5}$
94	$1\delta_{-0,53555,-1,143}$
95	$1\delta_{0,-1,6786}$
96	$1\delta_{0,56511,-1,1134}$
97	$1\delta_{1,1134,0,39412}$
98	$1\delta_{-0,39412,-1,1134}$
99	$1\delta_{0,-1,5076}$
100	$1\delta_{1,5076,0}$

### 3.4.10. Ejemplo 10

Ahora tratamos un caso mas complejo donde:

$$h(x, y) = -\frac{3}{4096}(\sqrt{3}x + y - 1)^5 - \frac{1}{24}(\sqrt{3}x + y - 1)^3 \quad (3.70)$$

y:

$$g(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & si \quad y \leq 1 - \sqrt{3}x \\ \frac{1}{192}(\sqrt{3}x + y - 1)^3 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y - 1) & \end{cases} \quad (3.71)$$

y:

$$f(x, y) = ((x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (y - \frac{1}{2}))^2 + ((x + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (y + \frac{1}{2}))^2 \quad (3.72)$$

La tabla 3.16 muestra la medida óptima para cada uno de los 400 elementos, además comparamos nuestros resultados con la solución exacta que se conoce.

Tabla 3.16: medida para polinomio(3.72)

Elemento	Programa matemático	Exacta
1	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,5,1}$
2	$0,5\delta_{-0,88,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
3	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
4	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,5,1}$
5	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
6	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
7	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
8	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
9	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
10	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,503,1}$
11	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
12	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
13	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
14	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,507,1}$
15	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,507,1}$
16	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,51,1}$

17	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,516,1}$
18	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,512,1}$
19	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,513,1}$
20	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,517,1}$
21	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,524,1}$
22	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,519,1}$
23	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,52,1}$
24	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,525,1}$
25	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,533,1}$
26	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,528,1}$
27	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,529,1}$
28	$1\delta_{0,56,1}$	$1\delta_{0,535,1}$
29	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,545,1}$
30	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,538,1}$
31	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,54,1}$
32	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,546,1}$
33	$1\delta_{0,56,1}$	$1\delta_{0,557,1}$
34	$1\delta_{0,56,0,98}$	$1\delta_{0,55,1}$
35	$1\delta_{0,55,0,98}$	$1\delta_{0,552,1}$
36	$1\delta_{0,57,1}$	$1\delta_{0,559,1}$
37	$1\delta_{0,56,1}$	$1\delta_{0,572,1}$
38	$1\delta_{0,57,1}$	$1\delta_{0,564,1}$
39	$1\delta_{0,57,0,99}$	$1\delta_{0,566,1}$
40	$1\delta_{0,57,0,99}$	$1\delta_{0,574,1}$
41	$0,5\delta_{-0,86,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
42	$0,5\delta_{-0,87,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
43	$0,5\delta_{-0,87,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
44	$0,5\delta_{-0,86,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
45	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
46	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,5,1}$
47	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,5,1}$
48	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
49	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,503,1}$

50	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,501,1}$
51	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
52	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
53	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,506,1}$
54	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
55	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
56	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,507,1}$
57	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,512,1}$
58	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
59	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,51,1}$
60	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,513,1}$
61	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,519,1}$
62	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,515,1}$
63	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,516,1}$
64	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,52,1}$
65	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,528,1}$
66	$1\delta_{0,52,0,97}$	$1\delta_{0,523,1}$
67	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,524,1}$
68	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,529,1}$
69	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,538,1}$
70	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,532,1}$
71	$1\delta_{0,55,0,99}$	$1\delta_{0,534,1}$
72	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,539,1}$
73	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,55,1}$
74	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,543,1}$
75	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,545,1}$
76	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,552,1}$
77	$1\delta_{0,58,1}$	$1\delta_{0,563,1}$
78	$1\delta_{0,55,0,99}$	$1\delta_{0,556,1}$
79	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,558,1}$
80	$1\delta_{0,56,1}$	$1\delta_{0,565,1}$
81	$0,5\delta_{-0,87,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
82	$0,51\delta_{-0,87,-0,49} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,506\delta_{-0,866,-0,5} + 0,494\delta_{0,866,0,5}$

83	$0,51\delta_{-0,87,-0,49} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,505\delta_{-0,866,-0,5} + 0,495\delta_{0,866,0,5}$
84	$0,5\delta_{-0,86,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
85	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
86	$0,5\delta_{-0,87,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
87	$0,5\delta_{-0,87,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
88	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
89	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
90	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,5,1}$
91	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
92	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
93	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,504,1}$
94	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,502,1}$
95	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
96	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
97	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
98	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,506,1}$
99	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,507,1}$
100	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
101	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,515,1}$
102	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,511,1}$
103	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,512,1}$
104	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,516,1}$
105	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,522,1}$
106	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,518,1}$
107	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,519,1}$
108	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,524,1}$
109	$1\delta_{0,54,0,98}$	$1\delta_{0,532,1}$
110	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,527,1}$
111	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,528,1}$
112	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,533,1}$
113	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,543,1}$
114	$1\delta_{0,56,0,99}$	$1\delta_{0,537,1}$
115	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,538,1}$

116	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,544,1}$
117	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,555,1}$
118	$1\delta_{0,56,0,99}$	$1\delta_{0,548,1}$
119	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,55,1}$
120	$1\delta_{0,56,1}$	$1\delta_{0,557,1}$
121	$0,51\delta_{-0,88,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,507\delta_{-0,866,-0,5} + 0,493\delta_{0,866,0,5}$
122	$0,51\delta_{-0,87,-0,48} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,513\delta_{-0,866,-0,5} + 0,487\delta_{0,866,0,5}$
123	$0,51\delta_{-0,89,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,511\delta_{-0,866,-0,5} + 0,489\delta_{0,866,0,5}$
124	$0,51\delta_{-0,87,-0,49} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,505\delta_{-0,866,-0,5} + 0,495\delta_{0,866,0,5}$
125	$0,5\delta_{-0,86,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
126	$0,5\delta_{-0,87,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,503\delta_{-0,866,-0,5} + 0,497\delta_{0,866,0,5}$
127	$0,5\delta_{-0,86,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
128	$0,5\delta_{-0,85,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
129	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
130	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
131	$1\delta_{0,48,0,99}$	$1\delta_{0,5,1}$
132	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
133	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,502,1}$
134	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
135	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
136	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
137	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,506,1}$
138	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,504,1}$
139	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
140	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,506,1}$
141	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,511,1}$
142	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,508,1}$
143	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
144	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,512,1}$
145	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,518,1}$
146	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,514,1}$
147	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,515,1}$
148	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,519,1}$



149	$1\delta_{0,55,1}$	$1\delta_{0,526,1}$
150	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,521,1}$
151	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,523,1}$
152	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,527,1}$
153	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,536,1}$
154	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,531,1}$
155	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,532,1}$
156	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,538,1}$
157	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,548,1}$
158	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,541,1}$
159	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,543,1}$
160	$1\delta_{0,57,1}$	$1\delta_{0,55,1}$
161	$0,52\delta_{-0,89,-0,5} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,514\delta_{-0,866,-0,5} + 0,486\delta_{0,866,0,5}$
162	$0,52\delta_{-0,86,-0,5} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,522\delta_{-0,866,-0,5} + 0,478\delta_{0,866,0,5}$
163	$0,52\delta_{-0,87,-0,51} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,52\delta_{-0,866,-0,5} + 0,48\delta_{0,866,0,5}$
164	$0,51\delta_{-0,84,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,512\delta_{-0,866,-0,5} + 0,488\delta_{0,866,0,5}$
165	$0,5\delta_{-0,86,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,503\delta_{-0,866,-0,5} + 0,497\delta_{0,866,0,5}$
166	$0,51\delta_{-0,86,-0,48} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,508\delta_{-0,866,-0,5} + 0,492\delta_{0,866,0,5}$
167	$0,51\delta_{-0,88,-0,52} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,506\delta_{-0,866,-0,5} + 0,494\delta_{0,866,0,5}$
168	$0,5\delta_{-0,86,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
169	$1\delta_{0,5,0,98}$	$1\delta_{0,5,1}$
170	$0,5\delta_{-0,86,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
171	$0,5\delta_{-0,86,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
172	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
173	$1\delta_{0,5,0,98}$	$1\delta_{0,501,1}$
174	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,5,1}$
175	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
176	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,501,1}$
177	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
178	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,502,1}$
179	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,502,1}$
180	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
181	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,508,1}$

182	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
183	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,506,1}$
184	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,508,1}$
185	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,514,1}$
186	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,51,1}$
187	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,511,1}$
188	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,515,1}$
189	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,521,1}$
190	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,517,1}$
191	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,518,1}$
192	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,522,1}$
193	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,53,1}$
194	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,525,1}$
195	$1\delta_{0,54,0,99}$	$1\delta_{0,526,1}$
196	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,532,1}$
197	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,541,1}$
198	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,535,1}$
199	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,537,1}$
200	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,543,1}$
201	$0,52\delta_{-0,86,-0,49} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,523\delta_{-0,866,-0,5} + 0,477\delta_{0,866,0,5}$
202	$0,53\delta_{-0,85,-0,49} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,534\delta_{-0,866,-0,5} + 0,466\delta_{0,866,0,5}$
203	$0,53\delta_{-0,87,-0,49} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,531\delta_{-0,866,-0,5} + 0,469\delta_{0,866,0,5}$
204	$0,52\delta_{-0,88,-0,5} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,521\delta_{-0,866,-0,5} + 0,479\delta_{0,866,0,5}$
205	$0,51\delta_{-0,86,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,508\delta_{-0,866,-0,5} + 0,492\delta_{0,866,0,5}$
206	$0,51\delta_{-0,86,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,515\delta_{-0,866,-0,5} + 0,485\delta_{0,866,0,5}$
207	$0,51\delta_{-0,87,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,513\delta_{-0,866,-0,5} + 0,487\delta_{0,866,0,5}$
208	$0,5\delta_{-0,86,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,507\delta_{-0,866,-0,5} + 0,493\delta_{0,866,0,5}$
209	$0,5\delta_{-0,87,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
210	$0,5\delta_{-0,87,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,504\delta_{-0,866,-0,5} + 0,496\delta_{0,866,0,5}$
211	$0,5\delta_{-0,87,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,503\delta_{-0,866,-0,5} + 0,497\delta_{0,866,0,5}$
212	$0,5\delta_{-0,87,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
213	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,5,1}$
214	$0,5\delta_{-0,87,-0,47} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$

215	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
216	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
217	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
218	$1\delta_{0,5,0,98}$	$1\delta_{0,501,1}$
219	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,501,1}$
220	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
221	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,505,1}$
222	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
223	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,504,1}$
224	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,506,1}$
225	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,51,1}$
226	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,507,1}$
227	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,508,1}$
228	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,511,1}$
229	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,517,1}$
230	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,513,1}$
231	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,514,1}$
232	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,518,1}$
233	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,525,1}$
234	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,52,1}$
235	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,521,1}$
236	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,526,1}$
237	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,534,1}$
238	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,529,1}$
239	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,531,1}$
240	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,536,1}$
241	$0,53\delta_{-0,86,-0,5} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,535\delta_{-0,866,-0,5} + 0,465\delta_{0,866,0,5}$
242	$0,55\delta_{-0,87,-0,51} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,548\delta_{-0,866,-0,5} + 0,452\delta_{0,866,0,5}$
243	$0,54\delta_{-0,85,-0,49} + 0,46\delta_{0,87,0,5}$	$0,545\delta_{-0,866,-0,5} + 0,455\delta_{0,866,0,5}$
244	$0,53\delta_{-0,88,-0,49} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,532\delta_{-0,866,-0,5} + 0,468\delta_{0,866,0,5}$
245	$0,52\delta_{-0,85,-0,49} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,516\delta_{-0,866,-0,5} + 0,484\delta_{0,866,0,5}$
246	$0,52\delta_{-0,86,-0,51} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,525\delta_{-0,866,-0,5} + 0,475\delta_{0,866,0,5}$
247	$0,52\delta_{-0,87,-0,5} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,522\delta_{-0,866,-0,5} + 0,478\delta_{0,866,0,5}$

248	$0,51\delta_{-0,87,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,514\delta_{-0,866,-0,5} + 0,486\delta_{0,866,0,5}$
249	$0,51\delta_{-0,87,-0,48} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,504\delta_{-0,866,-0,5} + 0,496\delta_{0,866,0,5}$
250	$0,51\delta_{-0,87,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,509\delta_{-0,866,-0,5} + 0,491\delta_{0,866,0,5}$
251	$0,51\delta_{-0,87,-0,49} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,508\delta_{-0,866,-0,5} + 0,492\delta_{0,866,0,5}$
252	$0,5\delta_{-0,87,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,503\delta_{-0,866,-0,5} + 0,497\delta_{0,866,0,5}$
253	$0,5\delta_{-0,88,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
254	$0,5\delta_{-0,9,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
255	$0,5\delta_{-0,88,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
256	$1\delta_{0,49,0,98}$	$1\delta_{0,5,1}$
257	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
258	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
259	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
260	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
261	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
262	$1\delta_{0,48,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
263	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
264	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
265	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,507,1}$
266	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
267	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
268	$1\delta_{0,52,0,98}$	$1\delta_{0,508,1}$
269	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,513,1}$
270	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
271	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,51,1}$
272	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,514,1}$
273	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,52,1}$
274	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,516,1}$
275	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,517,1}$
276	$1\delta_{0,53,0,99}$	$1\delta_{0,521,1}$
277	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,529,1}$
278	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,524,1}$
279	$1\delta_{0,53,0,98}$	$1\delta_{0,525,1}$
280	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,53,1}$

281	$0,55\delta_{-0,86,-0,5} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,55\delta_{-0,866,-0,5} + 0,45\delta_{0,866,0,5}$
282	$0,56\delta_{-0,87,-0,51} + 0,44\delta_{0,87,0,5}$	$0,565\delta_{-0,866,-0,5} + 0,435\delta_{0,866,0,5}$
283	$0,56\delta_{-0,86,-0,49} + 0,44\delta_{0,87,0,5}$	$0,561\delta_{-0,866,-0,5} + 0,439\delta_{0,866,0,5}$
284	$0,55\delta_{-0,87,-0,5} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,546\delta_{-0,866,-0,5} + 0,454\delta_{0,866,0,5}$
285	$0,52\delta_{-0,85,-0,49} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,526\delta_{-0,866,-0,5} + 0,474\delta_{0,866,0,5}$
286	$0,54\delta_{-0,88,-0,49} + 0,46\delta_{0,87,0,5}$	$0,538\delta_{-0,866,-0,5} + 0,462\delta_{0,866,0,5}$
287	$0,53\delta_{-0,87,-0,49} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,534\delta_{-0,866,-0,5} + 0,466\delta_{0,866,0,5}$
288	$0,52\delta_{-0,87,-0,49} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,523\delta_{-0,866,-0,5} + 0,477\delta_{0,866,0,5}$
289	$0,51\delta_{-0,86,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,51\delta_{-0,866,-0,5} + 0,49\delta_{0,866,0,5}$
290	$0,52\delta_{-0,88,-0,48} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,518\delta_{-0,866,-0,5} + 0,482\delta_{0,866,0,5}$
291	$0,52\delta_{-0,86,-0,49} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,515\delta_{-0,866,-0,5} + 0,485\delta_{0,866,0,5}$
292	$0,51\delta_{-0,87,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,508\delta_{-0,866,-0,5} + 0,492\delta_{0,866,0,5}$
293	$0,5\delta_{-0,88,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
294	$0,5\delta_{-0,86,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,505\delta_{-0,866,-0,5} + 0,495\delta_{0,866,0,5}$
295	$0,5\delta_{-0,88,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,504\delta_{-0,866,-0,5} + 0,496\delta_{0,866,0,5}$
296	$0,5\delta_{-0,86,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
297	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
298	$0,5\delta_{-0,85,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
299	$0,5\delta_{-0,89,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
300	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
301	$1\delta_{0,47,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
302	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
303	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
304	$1\delta_{0,49,0,98}$	$1\delta_{0,502,1}$
305	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
306	$1\delta_{0,5,0,98}$	$1\delta_{0,503,1}$
307	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
308	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,505,1}$
309	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
310	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,507,1}$
311	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,507,1}$
312	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,51,1}$
313	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,515,1}$

314	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,512,1}$
315	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,513,1}$
316	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,516,1}$
317	$1\delta_{0,53,1}$	$1\delta_{0,523,1}$
318	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,519,1}$
319	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,52,1}$
320	$1\delta_{0,54,1}$	$1\delta_{0,525,1}$
321	$0,57\delta_{-0,87,-0,5} + 0,43\delta_{0,87,0,5}$	$0,567\delta_{-0,866,-0,5} + 0,433\delta_{0,866,0,5}$
322	$0,58\delta_{-0,88,-0,52} + 0,42\delta_{0,87,0,5}$	$0,584\delta_{-0,866,-0,5} + 0,416\delta_{0,866,0,5}$
323	$0,58\delta_{-0,86,-0,5} + 0,42\delta_{0,87,0,5}$	$0,579\delta_{-0,866,-0,5} + 0,421\delta_{0,866,0,5}$
324	$0,56\delta_{-0,87,-0,47} + 0,44\delta_{0,87,0,5}$	$0,562\delta_{-0,866,-0,5} + 0,438\delta_{0,866,0,5}$
325	$0,54\delta_{-0,88,-0,48} + 0,46\delta_{0,87,0,5}$	$0,539\delta_{-0,866,-0,5} + 0,461\delta_{0,866,0,5}$
326	$0,55\delta_{-0,88,-0,5} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,552\delta_{-0,866,-0,5} + 0,448\delta_{0,866,0,5}$
327	$0,55\delta_{-0,89,-0,51} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,549\delta_{-0,866,-0,5} + 0,451\delta_{0,866,0,5}$
328	$0,54\delta_{-0,87,-0,5} + 0,46\delta_{0,87,0,5}$	$0,535\delta_{-0,866,-0,5} + 0,465\delta_{0,866,0,5}$
329	$0,52\delta_{-0,86,-0,51} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,518\delta_{-0,866,-0,5} + 0,482\delta_{0,866,0,5}$
330	$0,53\delta_{-0,85,-0,49} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,528\delta_{-0,866,-0,5} + 0,472\delta_{0,866,0,5}$
331	$0,53\delta_{-0,86,-0,51} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,525\delta_{-0,866,-0,5} + 0,475\delta_{0,866,0,5}$
332	$0,51\delta_{-0,87,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,516\delta_{-0,866,-0,5} + 0,484\delta_{0,866,0,5}$
333	$0,5\delta_{-0,85,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,506\delta_{-0,866,-0,5} + 0,494\delta_{0,866,0,5}$
334	$0,51\delta_{-0,84,-0,51} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,511\delta_{-0,866,-0,5} + 0,489\delta_{0,866,0,5}$
335	$0,51\delta_{-0,86,-0,49} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,51\delta_{-0,866,-0,5} + 0,49\delta_{0,866,0,5}$
336	$0,5\delta_{-0,87,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,504\delta_{-0,866,-0,5} + 0,496\delta_{0,866,0,5}$
337	$0,5\delta_{-0,88,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
338	$0,5\delta_{-0,87,-0,49} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
339	$0,5\delta_{-0,87,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,501\delta_{-0,866,-0,5} + 0,499\delta_{0,866,0,5}$
340	$0,5\delta_{-0,88,-0,51} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
341	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
342	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
343	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
344	$1\delta_{0,5,0,99}$	$1\delta_{0,501,1}$
345	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
346	$1\delta_{0,47,0,99}$	$1\delta_{0,501,1}$

347	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
348	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,503,1}$
349	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,506,1}$
350	$1\delta_{0,48,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
351	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,505,1}$
352	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,507,1}$
353	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,512,1}$
354	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,509,1}$
355	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
356	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,513,1}$
357	$1\delta_{0,51,0,99}$	$1\delta_{0,519,1}$
358	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,515,1}$
359	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,516,1}$
360	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,52,1}$
361	$0,59\delta_{-0,85,-0,48} + 0,41\delta_{0,87,0,5}$	$0,586\delta_{-0,866,-0,5} + 0,414\delta_{0,866,0,5}$
362	$0,61\delta_{-0,88,-0,5} + 0,39\delta_{0,87,0,5}$	$0,606\delta_{-0,866,-0,5} + 0,394\delta_{0,866,0,5}$
363	$0,6\delta_{-0,86,-0,51} + 0,4\delta_{0,87,0,5}$	$0,601\delta_{-0,866,-0,5} + 0,399\delta_{0,866,0,5}$
364	$0,58\delta_{-0,87,-0,5} + 0,42\delta_{0,87,0,5}$	$0,581\delta_{-0,866,-0,5} + 0,419\delta_{0,866,0,5}$
365	$0,55\delta_{-0,86,-0,52} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,554\delta_{-0,866,-0,5} + 0,446\delta_{0,866,0,5}$
366	$0,57\delta_{-0,86,-0,5} + 0,43\delta_{0,87,0,5}$	$0,57\delta_{-0,866,-0,5} + 0,43\delta_{0,866,0,5}$
367	$0,57\delta_{-0,86,-0,5} + 0,43\delta_{0,87,0,5}$	$0,565\delta_{-0,866,-0,5} + 0,435\delta_{0,866,0,5}$
368	$0,55\delta_{-0,86,-0,49} + 0,45\delta_{0,87,0,5}$	$0,55\delta_{-0,866,-0,5} + 0,45\delta_{0,866,0,5}$
369	$0,53\delta_{-0,87,-0,51} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,529\delta_{-0,866,-0,5} + 0,471\delta_{0,866,0,5}$
370	$0,54\delta_{-0,88,-0,51} + 0,46\delta_{0,87,0,5}$	$0,541\delta_{-0,866,-0,5} + 0,459\delta_{0,866,0,5}$
371	$0,54\delta_{-0,87,-0,5} + 0,46\delta_{0,87,0,5}$	$0,538\delta_{-0,866,-0,5} + 0,462\delta_{0,866,0,5}$
372	$0,53\delta_{-0,87,-0,5} + 0,47\delta_{0,87,0,5}$	$0,526\delta_{-0,866,-0,5} + 0,474\delta_{0,866,0,5}$
373	$0,51\delta_{-0,86,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,512\delta_{-0,866,-0,5} + 0,488\delta_{0,866,0,5}$
374	$0,52\delta_{-0,85,-0,5} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,52\delta_{-0,866,-0,5} + 0,48\delta_{0,866,0,5}$
375	$0,52\delta_{-0,87,-0,51} + 0,48\delta_{0,87,0,5}$	$0,518\delta_{-0,866,-0,5} + 0,482\delta_{0,866,0,5}$
376	$0,51\delta_{-0,87,-0,53} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,51\delta_{-0,866,-0,5} + 0,49\delta_{0,866,0,5}$
377	$0,5\delta_{-0,85,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
378	$0,51\delta_{-0,87,-0,49} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,507\delta_{-0,866,-0,5} + 0,493\delta_{0,866,0,5}$
379	$0,51\delta_{-0,86,-0,5} + 0,49\delta_{0,87,0,5}$	$0,505\delta_{-0,866,-0,5} + 0,495\delta_{0,866,0,5}$

380	$0,5\delta_{-0,88,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,502\delta_{-0,866,-0,5} + 0,498\delta_{0,866,0,5}$
381	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
382	$0,5\delta_{-0,86,-0,48} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
383	$0,5\delta_{-0,88,-0,5} + 0,5\delta_{0,87,0,5}$	$0,5\delta_{-0,866,-0,5} + 0,5\delta_{0,866,0,5}$
384	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
385	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
386	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,5,1}$
387	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,501,1}$
388	$1\delta_{0,5,0,96}$	$1\delta_{0,501,1}$
389	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
390	$1\delta_{0,48,1}$	$1\delta_{0,502,1}$
391	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,503,1}$
392	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,504,1}$
393	$1\delta_{0,51,0,98}$	$1\delta_{0,508,1}$
394	$1\delta_{0,49,0,99}$	$1\delta_{0,506,1}$
395	$1\delta_{0,52,0,99}$	$1\delta_{0,506,1}$
396	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,509,1}$
397	$1\delta_{0,52,1}$	$1\delta_{0,514,1}$
398	$1\delta_{0,5,1}$	$1\delta_{0,511,1}$
399	$1\delta_{0,49,1}$	$1\delta_{0,512,1}$
400	$1\delta_{0,51,1}$	$1\delta_{0,515,1}$

La figura 3.9 muestra la distribución de los elementos y la figura 3.10 muestra la solución  $u^*(x, y)$  para una malla de  $10 \times 10$ .



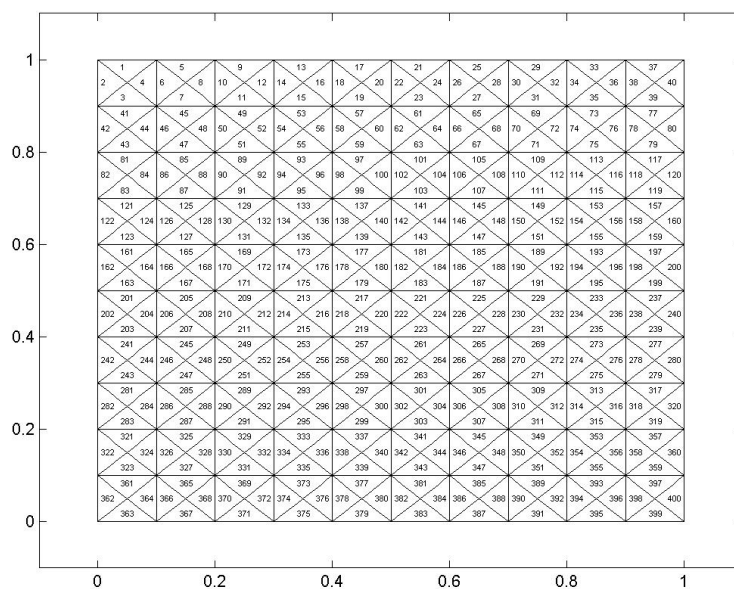


Figura 3.9: Malla para una distribución de elementos de  $10 \times 10$

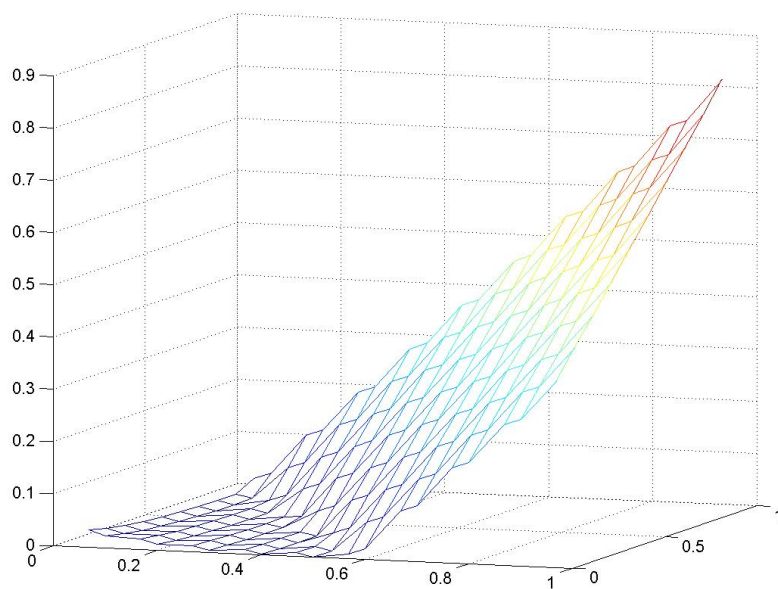


Figura 3.10: Solución  $u^*$  para una malla de  $10 \times 10$

# Capítulo 4

## Conclusiones

En el presente trabajo hemos mostrado de manera concluyente los siguientes hechos. En primer lugar que el análisis vía medidas de Young, propuesto en la literatura de análisis funcional y control óptimo, tiene cabida para desarrollar el tratamiento formal de diferentes problemas de mecánica analítica, en especial aquellos con energías cinéticas que incluyen términos no convexos en su planteamiento.

En segundo lugar, el análisis vía medidas parametrizadas permite extender la interpretación probabilista de Bohr a las variables de momentos y velocidades en sistemas mecánicos no lineales. Destacamos que este análisis es de particular ayuda en electrodinámica cuando consideramos la interacción entre los campos magnéticos producidos por el movimiento de las partículas involucradas y términos relativistas en su energía cinética.

Más allá de conseguir el análisis formal de la dinámica de los sistemas propuestos, hemos desarrollado un método general para su solución el cual contempla el uso de herramientas de álgebra real y optimización global para obtener la convexificación de expresiones polinomiales. En otras palabras, hemos conseguido un método general para resolver problemas variacionales generalizados descritos en términos de distribuciones de probabilidad.

Finalmente, hemos conseguido que el análisis y su solución numérica pueda desarrollarse dentro de un esquema de interpolación general que le da cabida a cualquiera de las bases de interpolación clásicas empleadas en física matemática y análisis numérico. Es así como para los problemas de electrodinámica desarrollados en el Capítulo 2, hemos utilizado un esquema de series de Fourier y en el Capítulo 3 hemos presentado la forma

de incorporar bases de aproximación locales como el sistema de splines de primer orden utilizado en el método de elemento finito. Esta característica permite que el método tenga un rango de aplicaciones bastante amplio.

Por estas razones pensamos que esta investigación es un primer paso en una dirección de trabajo que aparece bastante prometedora en mecánica no lineal, tanto en su formulación clásica, como cuántica y relativista. Esperamos, con ella, poder contribuir a un desarrollo original dentro de las ciencias básicas en nuestro país.

# Bibliografía

- [Akhiezer and Krein, 1992] Akhiezer, N. and Krein, K. (1992). *Some questions in the theory of moments*. Translations of Mathematical Monographs.
- [B., 2004] B., D. P. (2004). *Nonlinear Programming*. 2nd Edition.
- [Balder, 1997] Balder, E. (1997). Lectures on young measure theory and its applications in economics. In *Workshop di Theoria della Misura e Analisi Reale, Grado*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste.
- [Balder, 1999] Balder, E. (1999). Young measure techniques for existence of cournot-nash-walras equilibria. *Fields Institute Communications 23*, American Mathematical Society, Providence.
- [Ben-Tal and Nemirovskii, 2001] Ben-Tal, A. and Nemirovskii, A. (2001). *Lectures on Modern Convex Optimization*. TMPS, SIAM.
- [Bookman, 2002] Bookman, C. (2002). *Linux Clustering: Building and Maintaining Linux Clusters*. Sams, 1st edition.
- [Brooke A., 2005] Brooke A., Kendrick D., M. A. R. R. (2005). *GAMS A Users Guide*. GAMS Development Corporation.
- [Buttazo, ] Buttazo, G. e. a. *one dimensional variational problems*.
- [Castillo, 2000] Castillo, E. (2000). *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*. Pure and Applied Mathematics Serie,.
- [Cesari, 1983] Cesari, L. (1983). *Optimization, Theory and Applications*. Springer, New York.
- [Curto and Fialkow, ] Curto, R. and Fialkow, L. Recursiveness, positivity and truncated moment problems.
- [Curto and Fialkow, 1996] Curto, R. and Fialkow, L. (1996). Solution of the truncated complex moment problem for flat data. *Memoirs of the AMS*.
- [Curto and Fialkow, 2000] Curto, R. and Fialkow, L. (2000). The truncated complex k-moment problem. *Transactions of the AMS*.

- [Egozcue and Pedregal, 2003] Egozcue, J., R. M. and Pedregal, P. (2003). From a nonlinear, non-convex variational problem to a linear convex formulation. *Journal of Applied Mathematics and Optimization*.
- [Fourer, 1993] Fourer, R., G. D. K. B. (1993). *AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming*. The Scientific Press Series.
- [Gahinet, 1995] Gahinet, P. (1995). *LMI Control toolbox for Use with MATLAB*. Mathworks Inc.
- [Jackson, 1999] Jackson, J. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons Inc.
- [Krein and Nudelman, 1977] Krein, M. and Nudelman, A. (1977). The markov moment problem and extremal problems. *Translations of Mathematical Monographs*.
- [Lagrange, 2001] Lagrange, J. (2001). *Analytical Mechanics*. Springer.
- [Lanczos, 1986] Lanczos, C. (1986). *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publication.
- [Lasserre, 2001] Lasserre, J. (2001). Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J. Optim.*
- [Lasserre, 2002] Lasserre, J. (2002). Semidefinite programming vs lp relaxations for polynomial programming. *Annals of Operations Research Journal*.
- [Lindroth, 1989] Lindroth, E. (1989). *Further Analysis of the complete Breit interaction*. Physic Review A 39.
- [McWeeny, 1992] McWeeny, R. (1992). *Methods of Molecular Quantum Mechanichs*. Academic Press Limited.
- [Meziat, 2003a] Meziat, R. (2003a). Analysis of non-convex polynomial programs by the method of moments. *Nonconvex Optimization and its Applications Series*.
- [Meziat, 2003b] Meziat, R. (2003b). The method of moments in global optimization. *Journal of Mathematical Sciences*.
- [Meziat, 2004] Meziat, R. (2004). Analysis of two dimensional non-convex variational problems. *in press*.
- [Meziat and Patino, 2005] Meziat, R. and Patino, D. (2005). Analysis of convex envelopes of polynomials and exact relaxations of non-convex variational problems. *Journal in Convex Analysis, In review*.
- [Meziat, 2001] Meziat, R. J. (2001). El método de los momentos para problemas variacionales no convexos.
- [Milyutin and Osmolouskii, 2002] Milyutin, A. and Osmolouskii, N. (2002). Calculus of variations and optimal control. *Transactions of Mathematical Monographs*.

- [Mourdukovic, 1988] Mourdukovic, B. (1988). *Existence theorems in nonconvex optimal control, Calculus of Variations and Optimal Control*. Chapman and Hall.
- [Nesterov, 2000] Nesterov, Y. (2000). *Squared functional systems and optimization problems in High Performance Optimization*. Frenk, H., K. Roos and T. Terlaky, eds., Kluwer.
- [Pedregal, 1997] Pedregal, P. (1997). *Parametrized Measures and Variational Principles*. Birkhauser.
- [R. Meziat and Patiño, ] R. Meziat, J. V. and Patiño, D. Technical report.
- [Romesburg, 2004] Romesburg, C. (2004). *Cluster Analysis For Researchers*. Lulu Press.
- [Roubicek, 1997] Roubicek, T. (1997). *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*. De Gruyter.
- [Schimmel, 1994] Schimmel, C. (1994). *UNIX(R) Systems for Modern Architectures: Symmetric Multiprocessing and Caching for Kernel Programmer*. Addison-Wesley Professional.
- [Shohat and Tamarkin, 1943] Shohat, J. and Tamarkin, J. (1943). The problem of moments. *Mathematical Surveys*.
- [Vanderbei R.J., 2000] Vanderbei R.J., M. A. (2000). New orbits for the n-body problem. *Operations Research and Financial Engineering*.
- [Young, 1969] Young, L. (1969). *Lectures on Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Saunders.

# Apéndice A

## Lenguaje AMPL

La programación matemática es una de las áreas más estudiadas y trabajadas en el mundo técnico y científico. Gran parte de la labor en ingeniería, consiste en modelar procesos del mundo real a través de formulaciones matemáticas apropiadas.

Los problemas de programación matemática se resuelven mediante diversas técnicas de solución y han llevado a laboratorios, empresas y universidades a desarrollar software que tratan con problemas en un gran número de variables y problemas no lineales.

Uno de los software más utilizados en este campo es el lenguaje de interpretación AMPL que fue desarrollado en Bell Labs por R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan alrededor de 1985. AMPL se caracteriza por su grado de similitud con las expresiones aritméticas y la notación algebraica común. Ofrece un ambiente de comandos interactivo para configurar y resolver los programas matemáticos. AMPL posee una interfaz flexible en la cual, diferentes algoritmos son fáciles de configurar. Esto le da la categoría de *interpretador entre el usuario y un solucionador*.

El papel de AMPL es básicamente, proveer una interfaz con diferentes solucionadores o solvers, además la posibilidad de un lenguaje algebraico, el cual hace posible el énfasis de modelos generales que pueden ser útiles para la descripción de diversos problemas de optimización a gran escala.

El proceso para solucionar un problema de optimización utilizando este software se puede enumerar en los siguientes pasos:

1. Plantear el modelo del problema a resolver, el sistema de variables, las funciones objetivo y restricciones que representan el modelo general.
2. Especificar los datos que definen el problema en particular.

3. Solucionar el problema indicándole a AMPL el tipo de solucionador que utiliza el algoritmo apropiado para el tipo de problema.
4. Extraer información del solucionador y analizar los resultados.
5. Refinar el modelo y datos si es necesario.

A continuación realizaremos una breve descripción de los componentes del software y mostraremos un ejemplo sencillo en un problema matemático no lineal.

## Modelaje

La sesión en AMPL se comienza escribiendo `ampl` en la línea de comandos. Luego de ello se puede visualizar otra línea de comandos:

```
ampl:
```

Esto indica que AMPL está listo para ejecutar los comandos propios de su ambiente y por tanto, podemos considerar este software como un *lenguaje de programación* similar a Matlab pero orientado únicamente a problemas de optimización.

Como característica principal, en este lenguaje todos los comandos deben terminar en punto y coma “;”. Este símbolo funciona como un identificador de final de instrucción, de lo contrario aparecerá en la línea de comandos un símbolo de interrogación (?):

```
ampl?
```

Con el objetivo de crear un modelo de programación matemática disponemos de palabras reservadas de AMPL, alguna de ellas se listan en la tabla A.1.

Para más información ver [Fourer, 1993].

## Ejemplos

En esta sección presentamos un ejemplo sencillo para ilustrar la formulación del lenguaje algebraico AMPL. Luego pasaremos directamente a los comandos que representan los problemas expuestos en las secciones anteriores.

**Problema del paquete postal** Un paquete postal es una caja de dimensiones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , debe tener los siguientes requisitos para ser aceptado en la oficina de correos: La altura más el perímetro de la base no puede exceder 108 cm y además el volumen debe ser máximo. Entonces el programa matemático a resolver es:



Palabra reservada	Descripción
quit	Salir de AMPL
param	Define los parámetros del problema
var	Define las variables del sistema
maximize	Maximizar una función objetivo
minimize	Minimizar una función objetivo
subject to	Declara las restricciones del sistema
sum	Declaración de la sumatoria
model	Llama al modelo del programa matemático
data	Llama al modelo de los datos de prueba
solve	Resuelve el programa matemático
option	Cambia las opciones de solución
display	Muestra la solución

Tabla A.1: Palabras reservadas más comunes

$$\begin{aligned}
 &\text{máx } xyz \\
 &s.a. z + 2x + 2y \leq 108 \\
 &x, y, z \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

y en AMPL se escribe como:

```
var x >=0; var y >=0; var z >=0; maximize objet: x*y*z; subject
to first: z+2*x+2*y <= 108;
```

Luego lo almacenamos en un archivo de nombre `postal.mod`. Para cargar el modelo, escribimos bajo la línea de comandos:

```
ampl: model postal.mod;
```

y se soluciona con el comando `solve`:

```
ampl: solve;
```

Los resultados se visualizan con el comando `display`:

```
ampl: display x; x = 18; ampl: display y; y = 18; ampl: display z;
z = 36;
```

Obsérve que todos los comandos terminan en punto y coma (;).

### A.0.11. Ejemplo 2

La codificación del programa matemático (2.27) es:

```

param n:=100; param mp:=10; param pi:=4*atan(1); param h :=
2*pi/(n); param a1 := 2; param a0 := 1;

param theta {i in 1..n} := (i-1)*h;

var as {k in 1..mp} :=0.1; var ac {k in 1..mp} :=0.1;

var m {1..4, i in 1..n} :=2;

minimize A: (h)*sum{i in 1..n}((-2*m[2,i]+m[4,i])+1/(a0 + h*sum{j
in 1..i}(m[1,j])));

#Base polinomial subject to m_1 {i in 1..n}: m[1, i] = sum {k in
1..mp} (as[k]*k*(theta[i])^(k-1));

subject to r {i in 1..n}: (a0 + h*sum{j in 1..i}(m[1,j])) >=0.001;

# Matriz de Hankel
subject to subdet1 {i in 1..n}: m[2, i] >= (m[1, i])^2;
subject to subdet2 {i in 1..n}: m[4, i] >= (m[2, i])^2;
subject to subdet3 {i in 1..n}: m[2, i]*m[4, i] >= (m[3, i])^2;
subject to subdet4 {i in 1..n}: (m[2, i]*m[4, i] - (m[3, i])^2
- m[4, i]*(m[1, i])^2 + 2*m[1, i]*m[2, i]*m[3, i] - (m[2, i])^3) >= 0 ;

subject to Final_Point: m[1,1] = a1;

```

```
let {k in 1..mp} as[k] := 10; let {k in 1..mp} ac[k] := 10;
```

### A.0.12. Ejemplo 3: Interacción entre partículas

La codificación del programa matemático (??) es:

```
param n:=20; param mp:=3; param pi:=4*atan(1); param h :=
2*pi/(n); param mas1 := 9.1e-31; param mas2 := 1.6e-24; param c :=
3e8; param q1 := 1.6; param q2 := -1.6; param theta {i in
1..n} := (i-1)*h; param a0 := 0.5; param b0 := 0.5; param c0 := 1;
param d0 := 1; param a1 := 0.5; param b1 := 0.5; param c1 := 0.2;
param d1 := 0.1;
```

```
var as {k in 1..mp} :=0.1; var ac {k in 1..mp} :=0.1; var bs {k in
1..mp} :=0.1; var bc {k in 1..mp} :=0.1; var cs {k in 1..mp}
:=0.1; var cc {k in 1..mp} :=0.1; var ds {k in 1..mp} :=0.1; var
dc {k in 1..mp} :=0.1; var m {0..2,0..2,0..2,0..2,i in 1..n}
:=0.1;
```

```
minimize A: (h)*sum{i in 1..n}
((1/2)*(mas1*(m[2,0,0,0,i]+m[0,0,2,0,i])+
mas2*(m[0,2,0,0,i]+m[0,0,0,2,i]))-(1/2)*(q1*q2/(sqrt((((b0 +
h*sum{j in 1..i}(m[0,1,0,0,j]))-(a0 + h*sum{j in
1..i}(m[1,0,0,0,j]))))^2)+ (((d0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,0,1,j]))-(c0 + h*sum{j in 1..i}(m[0,0,1,0,j]))))^2))))
+(1/(4*c*c))*(m[1,1,0,0,i]+m[0,0,1,1,i]+(((a0 + h*sum{j in
1..i}(m[1,0,0,0,j]))*(c0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,1,0,j]))*m[0,1,1,0,i]-(b0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,1,0,0,j]))*(c0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,1,0,j]))*m[0,1,1,0,i]+(c0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,1,0,j]))*(c0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,1,0,j]))*m[0,0,1,1,i]-2*(c0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,1,0,j]))*(d0 + h*sum{j in
```

```

1..i}(m[0,0,0,1,j]))*m[0,0,1,1,i]-(a0 + h*sum{j in
1..i}(m[1,0,0,0,j]))*(d0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,0,1,j]))*m[0,1,1,0,i] +(b0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,1,0,0,j]))*(d0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,0,1,j]))*m[0,1,1,0,i] +(d0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,0,1,j]))*(d0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,0,1,j]))*m[0,0,1,1,i])/((sqrt(((b0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,1,0,0,j]))-(a0 + h*sum{j in
1..i}(m[1,0,0,0,j]))^2)+((d0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,0,1,j]))-(c0 + h*sum{j in
1..i}(m[0,0,1,0,j]))^2))))));

```

```

#Base polinomial subject to m_1 {i in 1..n}: m[1,0,0,0,i] = sum {k
in 1..mp} (as[k]*k*(theta[i])^(k-1)); subject to m_2 {i in 1..n}:
m[0,1,0,0,i] = sum {k in 1..mp} (bs[k]*k*(theta[i])^(k-1));
subject to m_3 {i in 1..n}: m[0,0,1,0,i] = sum {k in 1..mp}
(cs[k]*k*(theta[i])^(k-1)); subject to m_4 {i in 1..n}:
m[0,0,0,1,i] = sum {k in 1..mp} (ds[k]*k*(theta[i])^(k-1));

```

```

subject to subdet1 {i in 1..n}: ((m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])^2
*(m[1,0,1,0,i])^2+(m[1,1,0,0,i])^2*(m[0,0,1,0,i])^2*(m[0,0,0,2,i])
+(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,1,0,i])^2*(m[1,0,0,1,i])^2-(m[2,0,0,0,i])
*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,1,1,i])^2+(m[2,0,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])^2
*(m[0,1,1,0,i])^2-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])^2*(m[0,0,2,0,i])
+(m[2,0,0,0,i])*(m[0,0,1,0,i])^2*(m[0,1,0,1,i])^2+(m[1,1,0,0,i])^2
*(m[0,0,0,1,i])^2*(m[0,0,2,0,i])+(m[2,0,0,0,i])*(m[0,2,0,0,i])
*(m[0,0,2,0,i])*(m[0,0,0,2,i])+2*(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])
*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])
*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])
*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])
*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])

```

$$\begin{aligned}
&*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,0,2,0,i])+2*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,2,0,0,i]) \\
&*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,1,i]) \\
&*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,1,1,0,i])-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])^2 \\
&*(m[0,0,0,2,i])-(m[1,1,0,0,i])^2*(m[0,0,2,0,i])*(m[0,0,0,2,i]) \\
&-(m[0,2,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])^2*(m[0,0,0,2,i])-(m[0,2,0,0,i]) \\
&*(m[1,0,0,1,i])^2*(m[0,0,2,0,i])+(m[1,1,0,0,i])^2*(m[0,0,1,1,i])^2 \\
&+(m[1,0,1,0,i])^2*(m[0,1,0,1,i])^2+(m[1,0,0,1,i])^2*(m[0,1,1,0,i])^2 \\
&+(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,1,1,i])^2+(m[1,0,0,0,i])^2 \\
&*(m[0,1,1,0,i])^2*(m[0,0,0,2,i])+(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,1,0,1,i])^2 \\
&*(m[0,0,2,0,i])+(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,0,0,i])^2*(m[0,0,1,1,i])^2 \\
&+(m[0,1,0,0,i])^2*(m[1,0,1,0,i])^2*(m[0,0,0,2,i])+(m[0,1,0,0,i])^2 \\
&*(m[1,0,0,1,i])^2*(m[0,0,2,0,i])-(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,2,0,0,i]) \\
&*(m[0,0,2,0,i])*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,1,1,0,i]) \\
&*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,1,0,0,i]) \\
&*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,0,1,1,i])^2-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i]) \\
&*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,1,0,1,i])^2-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i]) \\
&*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,1,1,0,i])^2-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,0,0,i])^2 \\
&*(m[0,0,2,0,i])*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,0,i])^2 \\
&*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i]) \\
&*(m[0,0,0,1,i])*(m[1,0,1,0,i])^2-2*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i]) \\
&*(m[0,0,1,0,i])*(m[1,0,0,1,i])^2-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,2,0,0,i]) \\
&*(m[0,0,1,0,i])^2*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i]) \\
&*(m[0,0,1,0,i])^2*(m[1,0,0,1,i])-2*(m[0,0,1,0,i])*(m[1,1,0,0,i])^2 \\
&*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,2,0,0,i]) \\
&*(m[0,0,0,1,i])^2*(m[0,0,2,0,i])-2*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i]) \\
&*(m[0,0,0,1,i])^2*(m[1,0,1,0,i])+2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,1,0,0,i]) \\
&*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,0,2,0,i])*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[1,0,0,0,i]) \\
&*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,0,2,i]) \\
&+2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])*(m[0,0,0,1,i]) \\
&*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i]) \\
&*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,1,0,0,i]) \\
&*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,2,0,i])-2*(m[1,0,0,0,i]) \\
&*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])*(m[0,0,0,2,i])
\end{aligned}$$

```

+2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])
*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,2,0,0,i])
*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])
*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,1,1,0,i])+
2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])
*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,1,0,0,i])
*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,2,0,i])-2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])
*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,2,0,i])
+2*(m[1,0,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,1,1,0,i])*(m[0,0,1,0,i])
*(m[0,1,0,1,i])+2*(m[0,1,0,0,i])*(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])
*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,0,2,i])-2*(m[0,1,0,0,i])*(m[2,0,0,0,i])
*(m[0,1,1,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[0,1,0,0,i])
*(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,1,1,i])
+2*(m[0,1,0,0,i])*(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,0,1,i])
*(m[0,0,2,0,i])-2*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])*(m[1,1,0,0,i])
*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,0,0,2,i])+2*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])
*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])+2*(m[0,1,0,0,i])
*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[1,0,0,1,i])+
2*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,0,1,0,i])
*(m[0,0,1,1,i])-2*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])*(m[1,1,0,0,i])
*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,2,0,i])+2*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,0,0,1,i])
*(m[0,1,1,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[1,0,1,0,i])+2*(m[0,0,1,0,i])
*(m[2,0,0,0,i])*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,0,1,1,i])
-2*(m[0,0,1,0,i])*(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])*(m[0,0,0,1,i])
*(m[0,1,1,0,i])+2*(m[0,0,1,0,i])*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,0,1,i])
*(m[0,0,0,1,i])*(m[1,0,1,0,i])+2*(m[0,0,1,0,i])*(m[1,0,0,1,i])
*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[0,1,1,0,i])-2*(m[0,0,1,0,i])
*(m[1,0,0,1,i])*(m[0,2,0,0,i])*(m[0,0,0,1,i])*(m[1,0,1,0,i]))
>=0;

```

```

subject to subdet2 {i in 1..n}:((m[2,0,0,0,i])*(m[0,2,0,0,i])
*(m[0,0,2,0,i])-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])^2-(m[1,1,0,0,i])^2
*(m[0,0,2,0,i])+2*(m[1,1,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,1,0,i])
-(m[1,0,1,0,i])^2*(m[0,2,0,0,i])-(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,2,0,0,i])
*(m[0,0,2,0,i])+(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,1,1,0,i])^2+2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,0,2,0,i])-2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[1,1,0,0,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,1,1,0,i])-2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,1,0,0,i])*(m[0,1,1,0,i])+2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,2,0,0,i])-(m[2,0,0,0,i])
*(m[0,1,0,0,i])^2*(m[0,0,2,0,i])+2*(m[0,1,0,0,i])*(m[2,0,0,0,i])
*(m[0,0,1,0,i])*(m[0,1,1,0,i])+(m[0,1,0,0,i])^2*(m[1,0,1,0,i])^2
-2*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,0,1,0,i])*(m[0,0,1,0,i])*(m[1,1,0,0,i])
-(m[2,0,0,0,i])*(m[0,0,1,0,i])^2*(m[0,2,0,0,i])+(m[0,0,1,0,i])^2
*(m[1,1,0,0,i])^2) >=0;

```

```

subject to subdet3 {i in 1..n}:((m[2,0,0,0,i])*(m[0,2,0,0,i])
-(m[1,1,0,0,i])^2-(m[1,0,0,0,i])^2*(m[0,2,0,0,i])+2*(m[1,0,0,0,i])
*(m[0,1,0,0,i])*(m[1,1,0,0,i])-(m[0,1,0,0,i])^2*(m[2,0,0,0,i]))
>=0;

```

```

subject to subdet4 {i in 1..n}:((m[2,0,0,0,i])-(m[1,0,0,0,i])^2)
>=0;

```

```

subject to Initial_Vel1x: m[1,0,0,0,1] = a1; subject to
Initial_Vel1y: m[0,1,0,0,1] = b1; subject to Initial_Vel2x:
m[0,0,1,0,1] = c1; subject to Initial_Vel2y: m[0,0,0,1,1] = d1;

```

```

let {k in 1..mp} as[k] := 0.1; let {k in 1..mp} ac[k] := 0.1; let
{k in 1..mp} bs[k] := 0.1; let {k in 1..mp} bc[k] := 0.1; let {k
in 1..mp} cs[k] := 0.1; let {k in 1..mp} cc[k] := 0.1; let {k in
1..mp} ds[k] := 0.1; let {k in 1..mp} dc[k] := 0.1;

```

# Apéndice B

## Herramienta GAMS

El diseño en GAMS ha incorporado nuevas ideas, basadas en la teoría de base de datos y la programación matemática, para resolver las necesidades de los modelos.

La teoría de bases de datos posee un marco estructurado para el desarrollo logístico y para las capacidades de modificación de un problema, mientras la programación matemática es una formulación con una variedad de métodos de solución. Es por ello que las características principales de GAMS se pueden resumir en:

- Los métodos de solución no dependen de la representación del modelo, es decir, el usuario está en la capacidad de cambiar el algoritmo sin la necesidad de cambiar la representación del programa de optimización.
- El problema puede ser formulado independientemente de los datos de entrada. Por ejemplo, el número de datos en un problema puede ser fácilmente incrementado sin modificar el modelo.
- La forma en que GAMS representa un problema de optimización coincide con la descripción matemática estándar.

Al igual que AMPL, GAMS es básicamente una interfaz entre el usuario y un solucionador o solver, también se ejecuta mediante una línea de comandos y la interacción entre un archivo de modelo y un archivo de datos.

Existe una versión de evaluación restringida por el número de variables y el número de restricciones, que se encuentra en *www.gams.com* y se puede descargar de forma gratuita, junto con algunos solucionadores para ser instalado bajo sistemas Windows



o Unix. Para la versión Windows, está disponible una versión gráfica denominada **gamside**.

Para plantear un programa matemático en GAMS, necesitamos definir ciertos pasos:

1. Plantear el modelo que deseamos resolver, la función objetivo, las restricciones, parámetros y variables.
2. Especificar los datos del problema en particular.
3. Solucionar el problema de acuerdo con un método computacional apropiado.
4. Visualizar y analizar los resultados.

En resumen, los pasos para resolver un programa matemático en AMPL y en GAMS se definen de la misma manera

## Modelaje

A diferencia de AMPL, este lenguaje no trabaja con una línea de comandos propia, sino que depende de una línea de comandos o de los sistemas de UNIX.

Para resolver un programa, utilizamos la instrucción **gams** con el nombre donde se encuentra el modelo desde la línea de comandos.

Por ejemplo, si hay un modelo de un programa matemático llamado **postal.gms**, se soluciona de la siguiente manera:

```
gams postal.gms
```

Automáticamente se genera un archivo **postal.lst** donde se encuentra el modelo y los resultados que se visualizan incluyendo la palabra reservada **display** dentro del modelo. La Tabla B.1 muestra las palabras reservadas más importantes y su descripción. Algunas de las reglas más importantes de GAMS son las siguientes:

1. Es indiferente el uso de mayúsculas y minúsculas.
2. Cada comando debe terminar con un punto y coma.
3. Los comandos pueden aparecer en cualquier lugar siempre que los datos y variables que hayan sido declaradas con anterioridad.

Comando	Objetivo
Set	Declara un conjunto de índices y los propios índices de los vectores
Scalar	Declara los escalares
Parameter	Declara los vectores de datos y asigna los valores
Table	Declara y Asigna valores a las matrices de datos
Variable	Declara las variables de optimización y su carácter
Equation	Declara las restricciones y la función objetivo
Model	Declara los modelos y las restricciones que lo componen
Solve	Indica a GAMS que utilice un optimizador determinado
Display	Indica que resultados deben ser presentados

Tabla B.1: Algunas palabras reservadas de GAMS

4. Los identificadores que se utilizan no pueden utilizar las palabras reservadas de GAMS.
5. El uso de la -s- al final es indiferente.
6. Es posible escribir varios comandos en una línea si están separados por punto y coma.
7. Un sólo comando puede definir varios elementos del mismo tipo.

A continuación resolvemos el mismo ejemplo del paquete postal utilizando esta herramienta computacional algebraica.

### B.0.13. Ejemplo 1

Consideremos el mismo ejemplo de la sección anterior, pero utilizando la formulación planteada para GAMS y almacenarla en `postal.gms`:

```
$title PROBLEMA DEL PAQUETE POSTAL
```

```
**Definición de la variable de la función objetivo Variable obj;
```

```
**Definición de las variables de optimización Positive variables  
x,y,z;
```

```
**Definición de las ecuaciones equations
```

```
vol    Volumen del paquete
```

```

per      Restricción de perimetro;

vol..    obj =e=x*y*z; per..    z+2*x+2*y =l= 200;

**Definición del modelo Model postal /all/;

**Establecer puntos iniciales de variables de diseño x.l=1; y.l=1;
z.l=1;

**Resolver usando programación no lineal Solve postal using nlp
maximizing obj; **Muestra los resultados de las dimensiones
Display x.l; Display y.l; Display z.l;

```

Para ejecutarlo utilizamos el siguiente comando:

```
gams postal.gms
```

y se produce el siguiente resultado que se encuentra almacenado en `postal.lst`: \*\*\*\*

```

REPORT SUMMARY : 0 NONOPT 0 INFEASIBLE 0 UNBOUNDED 0 ERRORS
GAMS Rev 138 MS Windows 04/01/05 17:12:31 Page 6 PROBLEMA DEL PAQUETE
POSTAL E x e c u t i o n
— 26 VARIABLE x.L = 33.333
— 27 VARIABLE y.L = 33.333
— 28 VARIABLE z.L = 66.667

```

Para más información sobre GAMS ver [Castillo, 2000, Brooke A., 2005]. Tanto AMPL como GAMS requieren de solucionadores específicos de alto desempeño para un tipo de problemas en particular. Uno de los solvers más poderosos en optimización no lineal es el KNITRO, que se describirá brevemente a continuación.

# Apéndice C

## Solucionador KNITRO

KNITRO es uno de los solvers para problemas de optimización no lineal más recientes, ya que implementa algoritmos nuevos de punto interior (o de barrera) y tipos de conjuntos activos [B., 2004], además cuenta con algoritmos sobre regiones factibles que mejoran la convergencia.

Este solver puede manejar varias dimensiones sin perder la característica de convergencia. Su alto desempeño y robustez se debe básicamente, a que involucra información de la segunda derivada (Hessiano).

KNITRO funciona bajo plataformas AMPL, C/C++, Matlab, GAMS, MS Excel, Fortran, y es capaz de resolver los siguientes problemas:

- Programas matemáticos sin restricciones.
- Programas matemáticos con restricciones de desigualdad.
- Programas matemáticos con restricciones de igualdad.
- Sistemas de ecuaciones no lineales.
- Problemas de mínimos cuadrados.
- Problemas de programación lineal.
- Problemas de programación cuadrática.
- Problemas de restricciones en general.

Este solucionador fue programado por Ziena Optimization, Inc. y se puede descargar una versión gratuita en:

<http://www.ziena.com/knitro.html>

En general, los problemas que puede resolver KNITRO son de la forma:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{C.1}$$

La formulación (C.1) permite muchas formas de restricciones, desde restricciones de desigualdad, hasta condiciones de frontera en las variables. KNITRO asume que las funciones  $f(x)$ ,  $h(x)$  y  $g(x)$  son suaves, pero a pesar de ello, los problemas con derivadas discontinuas se pueden resolver en algunos casos.

En el método de punto interior (también conocido como método de barrera), el problema de programación no lineal se reemplaza por una serie de subproblemas, que son controlados por un parámetro de barrera [B., 2004]. El algoritmo usa regiones factibles y una función que asegura la convergencia y el solucionador realiza varios pasos de minimización en cada problema, va disminuyendo los parámetros hasta que el problema original haya alcanzado una tolerancia aceptable.

KNITRO utiliza dos procedimientos para calcular los pasos de la aproximación del punto interior:

1. En la versión conocida como Interior / CG, cada paso lo calculamos utilizando una iteración de gradiente conjugado y proyectándolo. Esta aproximación no requiere el cálculo de la solución de un sistema lineal en cada iteración como algunos de los métodos más conocidos en la literatura, en vez de ello, factoriza una matriz, y junto con el método de gradiente conjugado, se minimiza un modelo cuadrático del problema de barrera.
2. El segundo procedimiento para calcular los pasos se denomina método de punto Interior Directo, y calcula una nueva iteración mediante la solución de una matriz primal-dual con el algebra lineal directa. En el caso donde no se pueda garantizar una buena calidad del resultado, o si la nueva iteración se calcula por el procedimiento Interior/CG.

Además el solucionador implementa un algoritmo de programación lineal cuadrático

(SLQP), el cual se le denomina algoritmo Activo. Este método es similar en naturaleza a un método de programación cuadrática secuencial, pero usa subproblemas de programación cuadrática para estimar los conjuntos activos en cada iteración.

### C.0.14. Ejemplo

Consideremos AMPL y el solucionador KNITRO. Para instalarlo, basta con copiar el archivo ejecutable `knitro-ampl` en el directorio actual de AMPL y especificar las variables de ambiente necesarias.

El solucionador lo invocamos escribiendo en la línea de comandos:

```
ampl: option solver knitro-ampl;
```

Y para realizar la modificación de las opciones de usuario, como el número máximo de iteraciones y la tolerancia mínima permitida, utilizamos el comando:

```
ampl: option knitro_options 'maxit=100 alg=2';
```

Consideremos el problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 \geq 0; \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{C.2}$$

La codificación en AMPL, entonces, es:

```
# # Ejemplo
```

```
# Definir variables
```

```
var x{j in 1..3} >= 0;
```

```
# Función objetivo a minimizar.
```

```
minimize obj:
```

```

1000 - x[1]^2 - 2*x[2]^2 - x[3]^2 - x[1]*x[2] - x[1]*x[3];

# Restricción de igualdad.

s.t. c1: 8*x[1] + 14*x[2] + 7*x[3] - 56 = 0;

# Restricción de desigualdad

s.t. c2: x[1]^2 + x[2]^2 + x[3]^2 -25 >= 0;

data;

# Definir punto inicial

let x[1] := 2; let x[2] := 2; let x[3] := 2;

y resolvemos el modelo utilizando el siguiente conjunto de instrucciones:

ampl: reset; ampl: option solver knitro-ampl; ampl: option
knitro_options "alg=2 opttol=1e-8 outlev=3"; ampl: model
testproblem.mod; ampl: solve;

```

Los resultados se visualizan de la siguiente manera:

KNITRO 4.0.0: 10/20/04

: alg=2 opttol=1e-8 outlev=3

```

=====

KNITRO 4.0.0
Ziena Optimization, Inc.
website: www.ziena.com
email: info@ziena.com
=====

```

algorithm: 2 opttol: 1e-08 outlev: 3

# Problem Characteristics

```

-----
Number of variables:                3
    bounded below:                  3
    bounded above:                  0
    bounded below and above:        0
    fixed:                          0
    free:                          0
Number of constraints:              2
    linear equalities:              1
    nonlinear equalities:           0
    linear inequalities:            0
    nonlinear inequalities:         1
    range:                         0
Number of nonzeros in Jacobian:      6 Number of nonzeros in
Hessian:                            5

```

Iter	Objective	Feas err	Opt err	Step	CG its
-----	-----	-----	-----	-----	-----
0	9.760000e+02	1.300e+01			
1	9.688061e+02	7.190e+00	6.919e+00	1.513e+00	1
2	9.397651e+02	1.946e+00	2.988e+00	5.659e+00	1
3	9.323614e+02	1.659e+00	5.003e-03	1.238e+00	2
4	9.361994e+02	1.421e-14	9.537e-03	2.395e-01	2
5	9.360402e+02	7.105e-15	1.960e-03	1.591e-02	2
6	9.360004e+02	0.000e+00	1.597e-05	4.017e-03	1
7	9.360000e+02	7.105e-15	1.945e-07	3.790e-05	2
8	9.360000e+02	0.000e+00	1.925e-09	3.990e-07	1

EXIT: LOCALLY OPTIMAL SOLUTION FOUND.



## Final Statistics

-----

Final objective value = 9.36000000040000e+02 Final  
feasibility error (abs / rel) = 0.00e+00 / 0.00e+00 Final  
optimality error (abs / rel) = 1.92e-09 / 1.20e-10 # of  
iterations (major / minor) = 8 / 8 # of  
function evaluations = 9 # of gradient  
evaluations = 9 # of Hessian evaluations = 8  
Total program time (sec) = 0.00

=====

KNITRO 4.0.0: LOCALLY OPTIMAL SOLUTION FOUND.

# Apéndice D

## El concepto de cluster

Podría incluirse alguna definición de algún libro, pero el problema es que ni los expertos en clusters ni la gente que los implementa se ponen de acuerdo en qué es aquello en lo que trabajan. Un cluster podemos entenderlo como un conjunto de máquinas unidas por una red de comunicación trabajando por un servicio conjunto. Según el servicio puede ser dar alta disponibilidad, alto rendimiento, etc. Por supuesto esta definición no es estricta, de hecho uno de los problemas que tiene es que es demasiado vaga, por ejemplo dos consolas de videojuegos conectadas para jugar en red ¿se considera cluster? Pero si en vez de estar jugando se está usando el kit de GNU/Linux haciendo procesamiento paralelo ¿entonces se podría considerar cluster? [Romesburg, 2004, Bookman, 2002].

Realmente el cambio de ambiente es mínimo, desde luego a nadie se le ocurriría definir cluster en base al contenido de los programas que se ejecuten y de hecho es posible que los juegos tengan más capacidades de procesamiento distribuido que los propios programas, entonces ¿qué es un cluster?

Hay definiciones que distinguen entre cluster de máquinas Symmetric Multiprocessing (SMP) [Schimmel, 1994] y clusters formados por nodos monoprocesadores. Hay arquitecturas clusters que se denominan constelaciones y se caracterizan por que cada nodo contiene más procesadores que el número de nodos. A pesar de todo, las constelaciones siguen siendo clusters de componentes o nodos aventajados y caros.

Como ejemplos de la disparidad de opiniones que existen, se adjuntan las definiciones que dan ciertas autoridades de esta materia:

Un cluster consiste en un conjunto de máquinas y un servidor de cluster dedicado, para realizar los (relativamente infrecuentes) accesos a los recursos de otros procesos.

Un cluster es la variación de bajo precio de un multiprocesador masivamente paralelo (miles de procesadores, memoria distribuida, red de baja latencia), con las siguientes diferencias: cada nodo es una máquina quizás sin algo del hardware (monitor, teclado, mouse, etc.), el nodo podría ser SMP. Los nodos se conectan por una red de bajo precio como Ethernet o ATM aunque en clusters comerciales se pueden usar tecnologías de red propias. La interfaz de red no está muy acoplada al bus I/O. Todos los nodos tienen disco local. Cada nodo tiene un sistema operativo UNIX con una capa de software para soportar todas las características del cluster.

Es una clase de arquitectura de computador paralelo que se basa en la unión de máquinas independientes cooperativas integradas por medio de redes de interconexión para proveer un sistema coordinado, capaz de procesar una carga del autor Dr. Thomas Sterling.

#### **D.0.15. Características de un cluster**

Si no hay acuerdo sobre lo que es un cluster poco podrá acertarse en sus características. En este apartado se explican los requisitos que deben cumplir un conjunto de computadoras para ser consideradas cluster, tal y como se conocen hasta el momento. Para crear un cluster se necesitan al menos dos nodos. Una de las características principales de estas arquitecturas es que exista un medio de comunicación (red) donde los procesos, puedan migrar para computarse en diferentes estaciones paralelamente. Un solo nodo no cumple este requerimiento por su condición de aislamiento para poder compartir información. Las arquitecturas con varios procesadores en placa tampoco son consideradas clusters, bien sean máquinas SMP o mainframes, debido a que el bus de comunicación no suele ser de red, sino interno [Romesburg, 2004].

Por esta razón se deduce la primera característica de un cluster:

1. Un cluster consta de 2 o más nodos. Los nodos necesitan estar conectados para llevar a cabo su misión.
2. Los nodos de un cluster están conectados entre sí por al menos un canal de comunicación. Por ahora se ha referenciado a las características físicas de un cluster, que son las características sobre las que más consenso hay. Pero existen más problemas sobre las características del programador de control que se ejecuta,

pues es el software el que finalmente dotará al conjunto de máquinas de capacidad para migrar procesos, balancear la carga en cada nodo, etc.

3. Los clusters necesitan software de control especializado.

El problema también se plantea por los distintos tipos de clusters, cada uno de ellos requiere un modelado y diseño del software distinto.

Como es obvio las características del cluster son completamente dependientes del software, por lo que no se mencionan las funcionalidades del software sino el modelo general de software que lo componen.

Para empezar, parte de este software se debe dedicar a la comunicación entre los nodos. Existen varios tipos de software que pueden conformar un cluster:

- Software a nivel de aplicación. Este tipo de software se sitúa a nivel de aplicación, se utilizan generalmente bibliotecas de carácter general que permiten la abstracción de un nodo a un sistema conjunto, permitiendo crear aplicaciones en un entorno distribuido de manera lo más abstracta posible. Suele generar elementos de proceso del tipo rutinas, procesos o tareas, que se ejecutan en cada nodo del cluster y se comunican entre sí a través de la red.
- Software a nivel de sistema. Este tipo de software se sitúa a nivel de sistema, suele estar implementado como parte del sistema operativo de cada nodo, o ser la totalidad de éste.

Es más crítico y complejo, por otro lado suele resolver problemas de carácter más general que los anteriores y su eficiencia, por norma general, es mayor.

#### **D.0.16. Elementos de un cluster**

Los elementos utilizados para formar este cluster son:

1. Dos estaciones de trabajo *Sun Java W2100z*
2. Computador Pentium 4 Dell
3. Un switch de 16 puertos 3COM.
4. Dos servidores *V20z*.

Para formar el cluster se interconectan los diferentes dispositivos, en este caso en forma de estrella como se muestra en la figura D.1. El nodo central son los servidores y los nodos laterales son las estaciones de trabajo y los PC. La figura D.2 muestra más

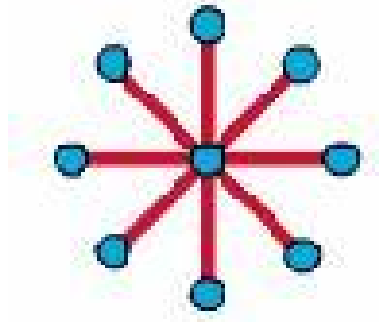


Figura D.1: Conexión en estrella

detalladamente el cluster. A continuación describiremos con más detalle algunos de los

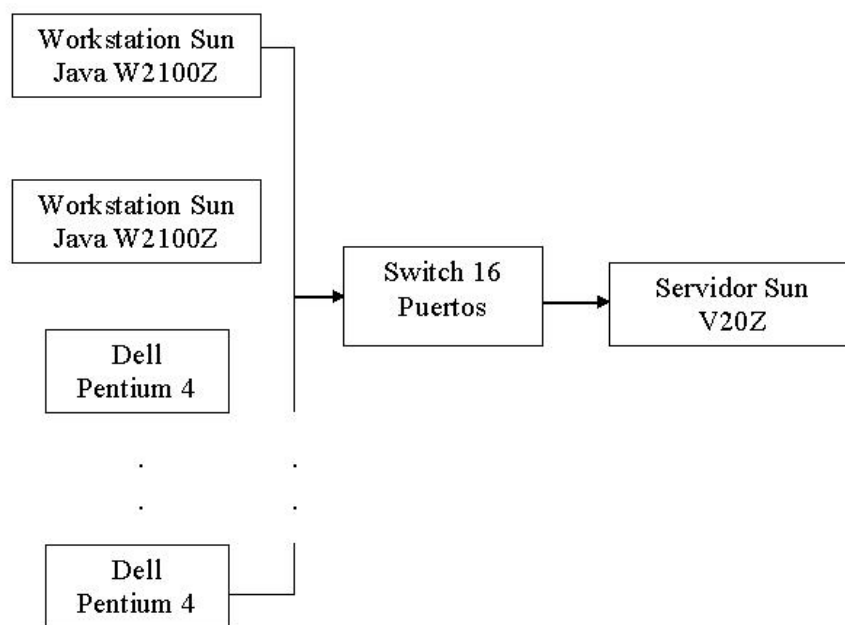


Figura D.2: Elementos de un cluster

componentes:

### Estación de trabajo W2100z

Las estaciones de trabajo Sun Java W2100z son sistemas basados en el procesador AMD Opteron. Las estaciones de trabajo se envían con dos procesadores AMD 64 Opteron

ya instalados en los zócalos 940 de AMD incorporados. Tienen capacidad de hasta 16 GB de SDRAM ECC 400 DDR de doble canal para el sistema de dos procesadores (cuatro bancos DIMM por procesador). La capacidad de disco duro incluye hasta dos discos duros PATA-100 internos de 80 GB o hasta dos unidades de disco duro SCSI Ultra 320 de 73 GB.

Las estaciones de trabajo Sun Java 2100z están equipadas con una ranura AGP 8x para tarjetas de gráficos de altas prestaciones, una ranura PCI-X de 133 MHz y cuatro de 100 MHz. La estación de trabajo también incluye una interfaz Gigabit Ethernet, dos interfaces IEEE 1394, cinco interfaces USB 2.0 e interfaces de audio estándar de la industria.

Las características principal de este equipo son:

- **CPU:** Dos procesadores AMD Opteron de 64 bits, frecuencias de procesador: 1,8 GHz, hasta 1 MB de caché de nivel
- **Memoria:** Cuatro ranuras DIMM por procesador, Cada zócalo DIMM en la placa admite módulos de SDRAM DDR 400 de 512 MB, 1 GB o 2 GB (con una altura máxima de 3,05 cm).
- **Soporte de almacenamiento:** Unidades de CD-RW/DVD-ROM.
- **Fuentes de alimentación:** 550 W.
- **E/S red:** Controlador Gigabit Ethernet 10/100BASE-T Broadcom BCM5703ci.
- **E/S de interfaz PCI:** Cinco ranuras de bus PCI con cuatro segmentos de bus diferentes.
- **Otras interfaces:** Un conector paralelo/de impresora, Dos conectores serie, Cinco conectores USB 2.0 (dos en la parte anterior y tres en la posterior de la estación de trabajo), Dos conectores IEEE 1394 (firewire), Conectores hembra de línea de entrada/salida, Conectores hembra para micrófono.

La figura D.3 muestra el esqueleto de la estación de trabajo utilizada para el proyecto.

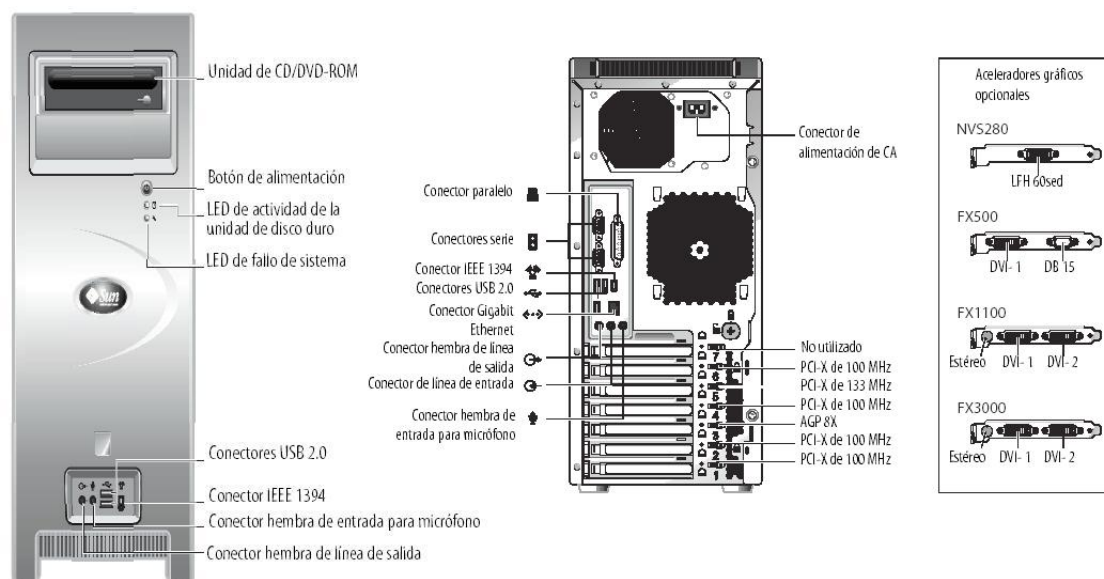


Figura D.3: Estación de trabajo W2100z

### Servidor V20z

El Sun Fire V20z es un procesador de la filosofía servidor. Este dispositivo provee un incremento en el desempeño de proyecto de ambiente empresarial. El procesador AMD Opteron implementa la arquitectura x86-64, que maneja una capacidad de memoria significativa y un ancho de banda de dos o tres veces la capacidad de un servidor x86 de 32 bits. El servidor balanceado maximiza el desempeño para proyectos que requieren muchos procesos de cálculo y puertos de entrada, salida.

El servidor Sun Fire V20z incluye un procesador embebido (SP), memoria flash, RAM, una interfaz de Ethernet separada y un software para manejar servidores mediante línea de comandos sencillas.

Las características principales de este equipo son:

- **CPU:** Dos procesadores AMD Opteron de 64 bits, frecuencias de procesador: 1,8 GHz.
- **Memoria:** 512 MB–16 GB ECC, DDR 333 SDRAM (8 slots, 2 GB DIMM max. por slot, 3.05 cm max. de altura).
- **E/S red:** Controlador Gigabit Ethernet 10/100BASE-T Broadcom BCM5703ci.
- **E/S de interfaz PCI:** 2 PCI-X ranuras de expansión: 1 full-length 66 MHz/64-bit o 133 MHz/64-bit.

- **Otras interfaces:** CD ROM Interno y drive de diskettes.

La figura D.4 muestra la apariencia del servidor en su parte frontal y la figura D.5 muestra la parte posterior del servidor.

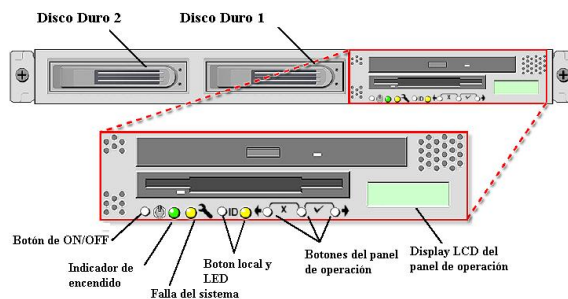


Figura D.4: Parte frontal del servidor

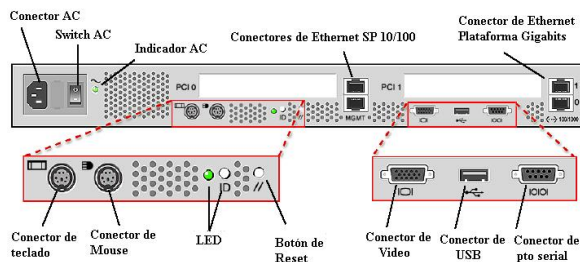


Figura D.5: Parte posterior del servidor

### Un switch de 16 puertos 3COM

El switch se denomina puente multipuerto y toma decisiones basándose en las direcciones. Como los switches son capaces de tomar decisiones, hacen que la red sea mucho más eficiente conmutando los datos sólo hacia el puerto al que está conectado el servidor destino apropiado.

A primera vista los switches parecen a menudo similares a los hubs. Tanto los hubs como los switches tienen varios puertos de conexión, dado que una de sus funciones es la concentración de conectividad (permitir que varios dispositivos se conecten a un punto de la red). La diferencia entre un hub y un switch está dada por lo que sucede dentro del dispositivo.

El propósito del switch es concentrar la conectividad, haciendo que la transmisión de datos sea más eficiente. Es un elemento que puede combinar la conectividad con



la regulación de tráfico. El switch conmuta paquetes desde los puertos (interfaces) entrantes a los puertos salientes, suministrando a cada puerto el ancho de banda total (la velocidad de transmisión de datos en el backbone de la red).

Las características principales se resumen en:

- Standards: IEEE 802.3 for 10BaseT Ethernet, IEEE 802.3 para Ethernet de 10/100 Mbps.
- Comunicación bidireccional full-duplex.
- 16 puertos para 16 nodos.