ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO NO LINEAL

René J. Meziat Pablo Pedregal*

Diego A. Patiño

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

***UNIVERSIDAD DE CASTILLA – LA MANCHA**

CONTENIDO

1. Justificación
2. Convexificación
3. Método de los Momentos
4. Ejemplos de aplicación del método:
    1. Tratamiento trigonométrico
    2. Tratamiento polinomial
5. Trabajo futuro
6. Conclusiones

JUSTIFICACIÓN

Proponemos una forma alternativa para resolver problemas de control óptimo no lineal:

$$Min \int_0^1 f(x,u,t)dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = g(x,u,t)$$

$$x(0) = x_0 \qquad x(1) = x_f$$

x: Variables de estado del sistema

u: Señal de control

JUSTIFICACIÓN

Dificultades de linealidad:	*Dificultades de convexidad:*
1. NO LINEAL: • **Integración** • Inestabilidad • Caos • Singularidades	2. NO CONVEXO : • **No aplica la teoría clásica para establecer existencia de la solución.**

CONVEXIFICACIÓN

Pedregal y Muñoz. Universidad de Castilla – La Mancha

1998

Método de relajación en medidas de probabilidad (MEDIDAS PARAMETRIZADAS SOBRE EL CONTROL - YOUNG).

$$Min \quad \int_0^1 \int f(x,\lambda,t)\,d\mu(\lambda)\,dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = \int g(x,\lambda,t)\,d\mu(\lambda)$$

$\mu \in P(\Omega)$

Espacio de control

(Lineal – Convexo en medidas de probabilidad)

CONVEXIFICACIÓN

***Pedregal y Muñoz.**

- Proceso de convexificación en el espacio de control Ω, mediante integración con distribuciones de probabilidad:

$$f \longrightarrow \int f d\mu$$

$$\Omega \qquad\qquad co(\Omega)$$

Obtenemos un problema definido en la envoltura convexa del espacio de control.

MÉT. DE LOS MOMENTOS

Estructura:

$$f(u) = \sum_{0}^{N} c_i \psi_i(u)$$

$$\int f(u)\, d\mu = \sum_{0}^{N} c_i m_i$$

- **Lineal**
- **Convexa**

m_i: Momentos

$$\mu \rightarrow (m_i) \quad \in \quad co(\Omega)$$

MÉT. DE LOS MOMENTOS

- Estructura polinomial:

$$f\left(x,u,t\right)=\sum_{0}^{N}c_i\left(x,t\right)u^i \qquad \int f\left(x,\lambda,t\right)d\mu\left(\lambda\right)=\sum_{0}^{N}c_i\left(x,t\right)m_i$$

$$g\left(x,u,t\right)=\sum_{0}^{M}d_i\left(x,t\right)u^i \qquad \int g\left(x,\lambda,t\right)d\mu\left(\lambda\right)=\sum_{0}^{M}d_i\left(x,t\right)m_i$$

MÉT. DE LOS MOMENTOS

- Caracterización de momentos

$$H(m)=\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_N \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{N+1} \\ m_2 & m_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_N & m_{N+1} & \dots & \dots & m_{2N} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\min_m \int_0^1 \sum_0^N c_i(x,t) m_i(t) dt$$

$$\dot{x} = \sum_0^M d_i(x,t) m_i(t)$$

$$x(0) = x_0 \qquad x(1) = x_f$$

$\downarrow$

Hankel Semidefinida Positiva

Problema de control óptimo con forma lineal para el control con una familia convexa de controles m ∈ co(Ω)

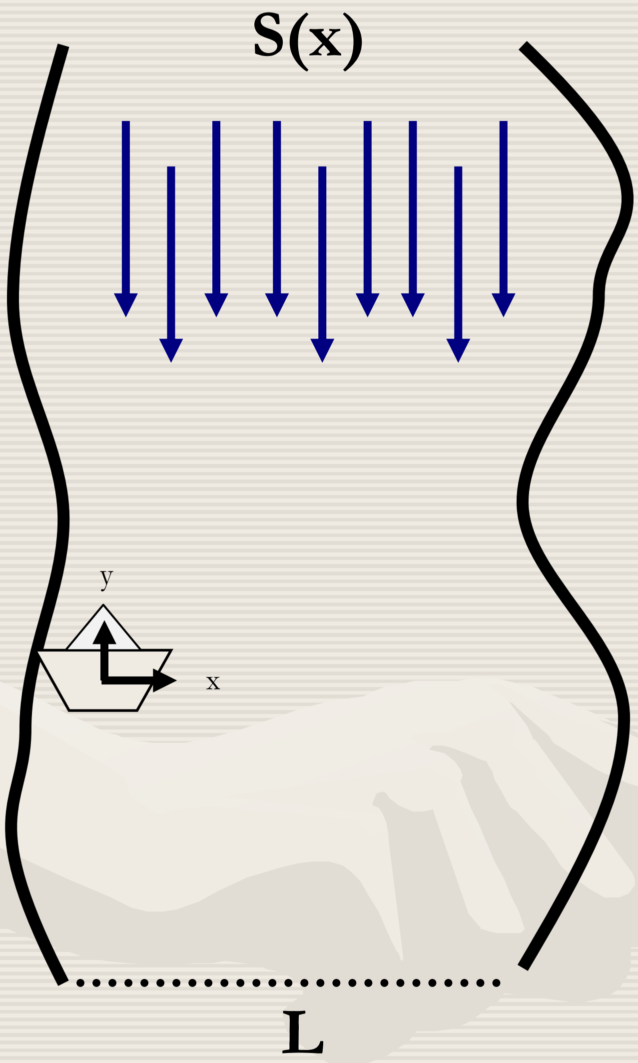
MÉT. DE LOS MOMENTOS

A $\longleftrightarrow$ **B**

Medida en P(Ω)	$\mu \longleftrightarrow m$	Vector de momentos
Convexo	Proyección	Convexo

COVEXIFICACIÓN

EJEMPLOS TRIGONOMÉTRICOS



Modelo:

$$\dot{x} = V\cos\theta$$

$$\dot{y} = V\sin\theta + S(x)$$

Se trata de minimizar la energía del sistema y la cantidad que se aleje de la horizontal

EJEMPLO 1:

Minimización de energía cinética (Corriente en y):

$$Min \int_0^t \left[\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2 \right] dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = V \cos\theta$$

$$\dot{y} = V \sin\theta + S(x)$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x(1) = L$$

PROBLEMA DE CONTROL NO LINEAL

$\downarrow$

MÉTODO CLÁSICO (HAMILTON)

EJEMPLO 1 – MÉTODO CLÁSICO

$$H = g + p^T a$$

$$H = \left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + p_1 V\cos\theta + p_2 V\sin\theta + p_2 S(x)$$

$$\left(\dot{\bar{p}}\right) = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$\rightarrow$ **PRINCIPIO DEL MÍNIMO DE POYNTRIAGUIN**

$\downarrow$

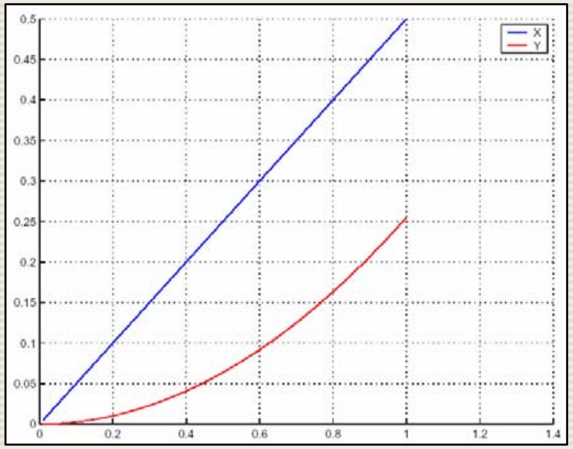
$$\dot{x} = V\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + 4x^2}}$$

$$\dot{y} = V\frac{2x}{\sqrt{p_1^2 + 4x^2}}$$

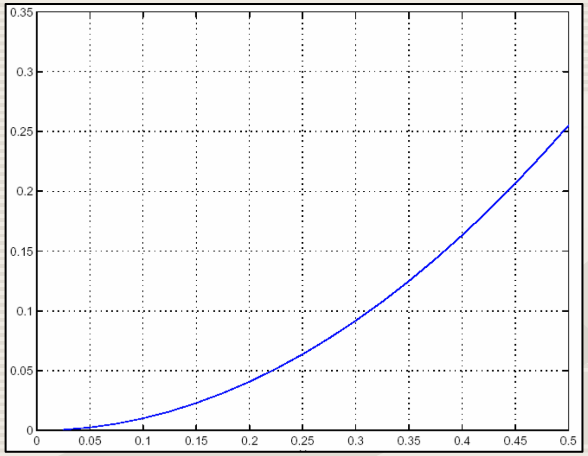
$$\dot{p}_1 = -4\frac{Vx}{\sqrt{p_1^2 + 4x^2}} - 2x$$

$\leftarrow$ **RUNGE-KUTTA 4to ORDEN**

EJEMPLO 1 – RESULTADOS CLÁSICOS



t vs X t vs Y



X vs Y

EJEMPLO 1 - NUEVA PROPUESTA

PROBLEMA DE CONTROL NO LINEAL

↓

RELAJACIÓN CONVEXA

↓

PROGRAMA MATEMÁTICO CONVEXO

$$Min \int_0^t \left[\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2 \right] dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = V \cos\theta$$

$$\dot{y} = V \sin\theta + S(x)$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x(1) = L$$

EJEMPLO 1 - NUEVA PROPUESTA

BASE TRIGONOMÉTRICA

MATRIZ DE TOEPLITZ SEMIDEFINIDA POSITIVA

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_{-1} \\ m_1 & m_0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\overline{m_1} = m_{-1}$$

$$real\ (m_1) = \alpha$$

$$imag\ (m_1) = \beta$$

$$m_0 = 1$$

$$Min \int \left[\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2 \right] dt$$

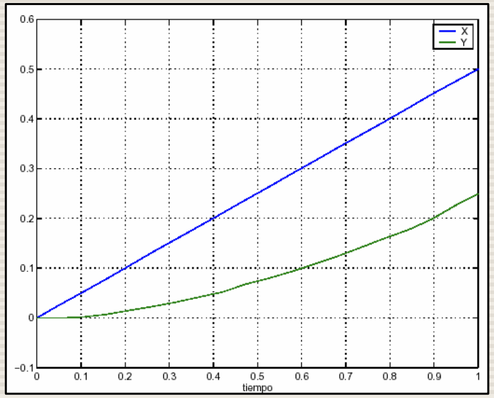
$$s.a. \quad \dot{x} = V\alpha$$

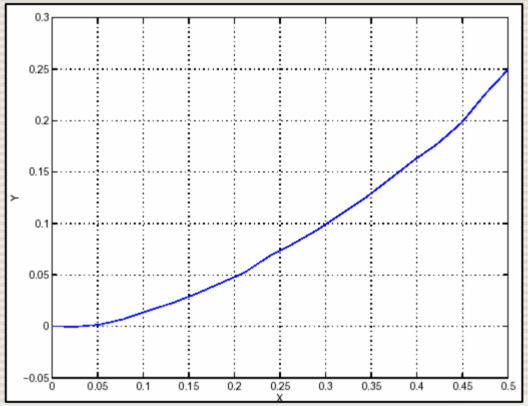
$$\dot{y} = V\beta + x$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$$

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0 \quad x(1) = L$$

EJEMPLO 1 - NUEVA PROPUESTA

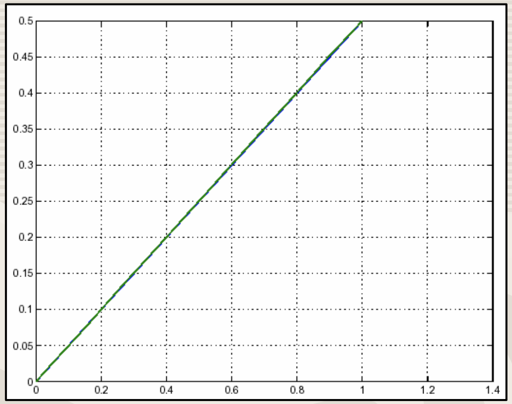




t vs X **t vs Y**

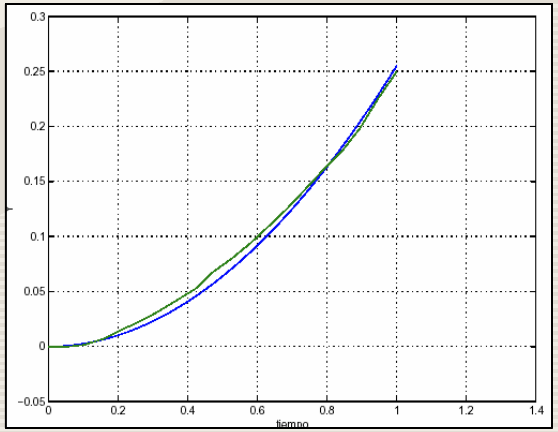
X vs Y

COMPARACION CON EL MÈTODO HABITUAL



Estimación del Error

$$e_i = \left| \frac{(x_i - \hat{x}_i)}{x_i} \right|$$



t vs X

$$\mu_X = 0.01047 \qquad \mu_Y = 0.1184$$

t vs Y

$$\sigma_X{}^2 = 0.0555 \qquad \sigma_Y{}^2 = 0.0758$$

EJEMPLO 2

Minimización de energía cinética (Corriente en x, y):

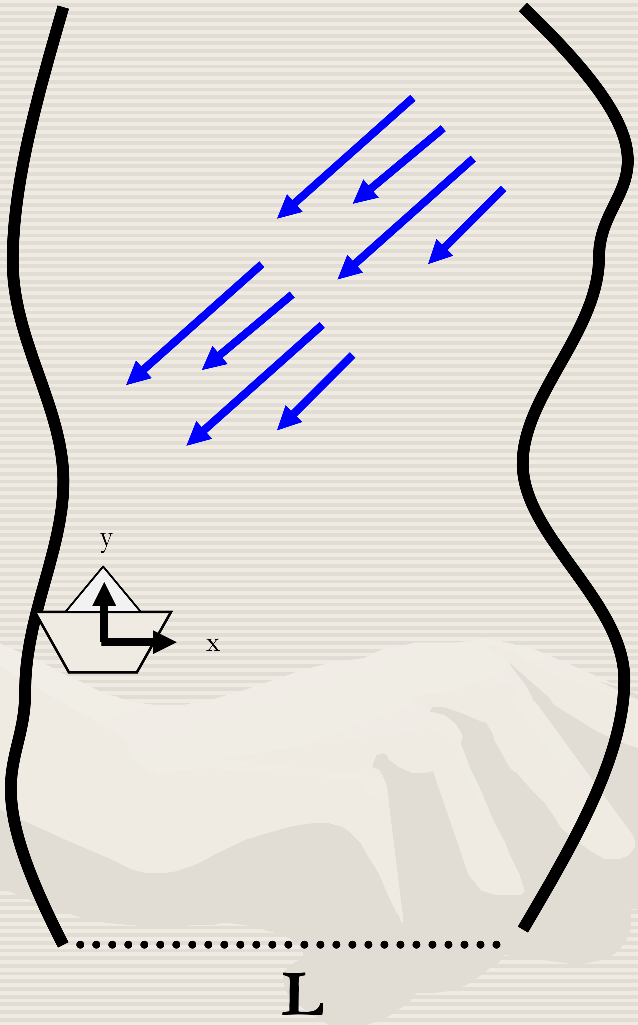
$$Min \int_0^t \left[\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2 \right] dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = V \cos\theta + S(y)$$

$$\dot{y} = V \sin\theta + S(x)$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x(1) = L$$

EJEMPLO 2 – MÉTODO CLÁSICO



PRINCIPIO DEL MÍNIMO DE POYNTRIAGUIN

$$\dot{x} = V\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} + y$$

$$\dot{y} = -\frac{2V\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} - 2x - p_2$$

$$\dot{p}_1 = -2\frac{V\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} - 2y - p_1$$

$$\dot{p}_2 = -2\frac{V\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} - 2y - p_1$$

$$\gamma = 2y + p_1$$

$$\alpha = 2x + p_2$$

RUNGE-KUTTA 4to ORDEN

EJEMPLO 2 - NUEVA PROPUESTA

$$Min \int_0^1 \left[\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2 \right] dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = V\cos\theta + y$$

$$\dot{y} = V\sin\theta + x$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x(1) = L$$

$$Min \int_0^t \left[\left(\dot{x} \right)^2 + \left(\dot{y} \right)^2 \right] dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = V\alpha + y$$

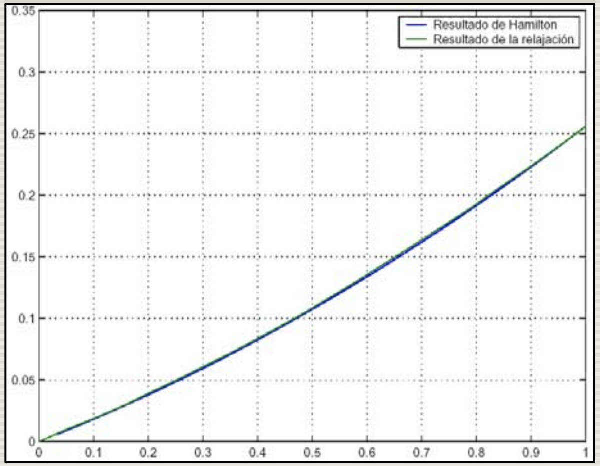
$$\dot{y} = V\beta + x$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$$

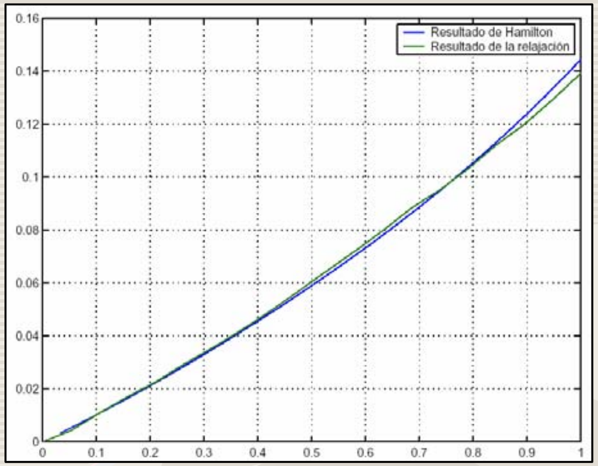
$$x(0) = 0 \quad x(t) = L \quad y(0) = 0$$

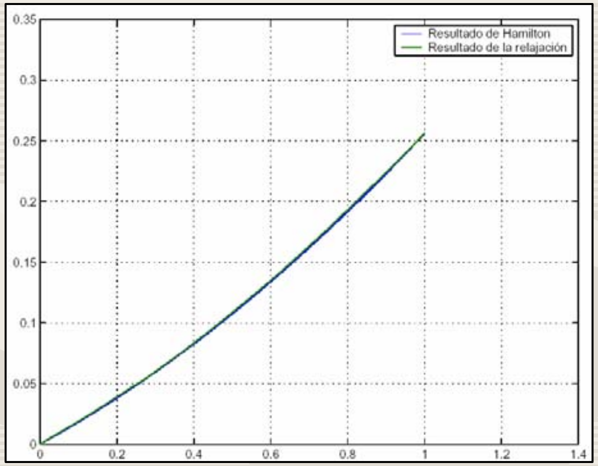
BASE DE LA RELAJACIÓN: $\{1, e^{it}, e^{-it}\}$

EJEMPLO 2-RESULTADOS CON MALLAS PROGRESIVAMENTE MÀS FINAS

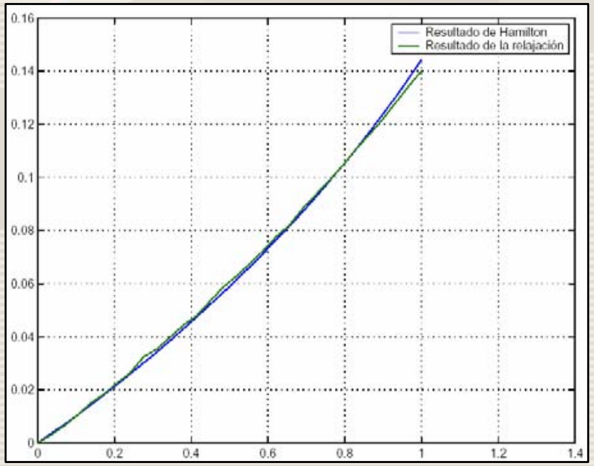


20 puntos





30 puntos



t vs X **t vs Y**

DISMINUCIÓN DEL ERROR

# puntos	μ_X	σ_X^2	μ_Y	σ_Y^2
20 puntos	0.1315	0.0542	0.1432	0.0595
30 puntos	0.0961	0.0385	0.1019	0.0439
40 puntos	0.0773	0.0301	0.1010	0.0366

EJEMPLO 3

minimizar una medida de la trayectoria

$$Min \int_0^t y^2 dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = V\cos\theta$$

$$\dot{y} = V\sin\theta + S(x) \quad S(x) = x$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x(t) = L$$

$$\dot{x} = \frac{Vp_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

$$\dot{y} = \frac{Vp_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

$$\dot{p} = -2x$$

EDOs

NO LINEALES

PROBLEMA DE CONTROL CONVEXO

$$Min \int_0^t y^2 dt$$

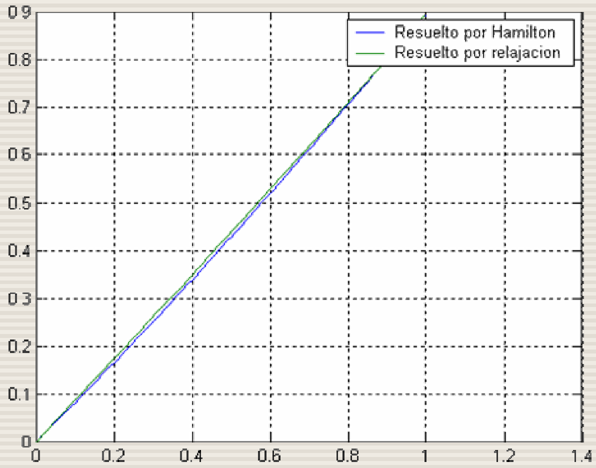
$$s.a. \quad \dot{x} = V\alpha$$

$$\dot{y} = V\beta + x$$

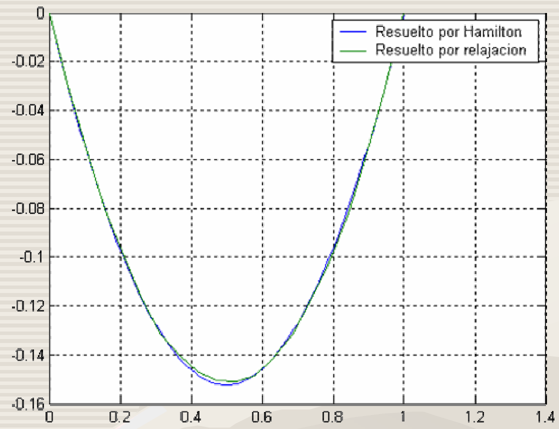
$$\alpha^2 + \beta^2 \le 1$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad x(1) = L$$

EJEMPLO 3-SOLUCIÓN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA



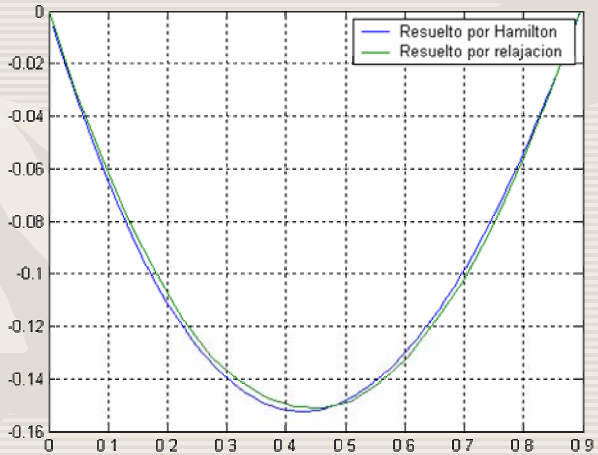
t vs X



t vs Y

COMPARACIÓN

CON PMP



X vs Y

DISMINUCIÓN PROGRESIVA DEL ERROR CON EL NÚMERO DE PUNTOS EN LA MALLA

# puntos	μ_X	σ_X^2	μ_Y	σ_Y^2
20 puntos	0.0765	0.0201	0.1012	0.0435
30 puntos	0.0645	0.0123	0.0812	0.0329
40 puntos	0.0443	0.011	0.0810	0.0387

EJEMPLO 4
minimizar un esfuerzo de control.

$$Min \int_0^t |u|dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = u^2 - ux + x$$

$$x(0) = 0 \qquad x(1) = 1$$

MÉTODO HABITUAL PMP

$$\dot{x} = u^2 - ux + x$$

$$\dot{p} = pu - p$$

$$\operatorname{sgn}(u) + 2pu - px = 0$$

MÉTODO DE LOS MOMENTOS

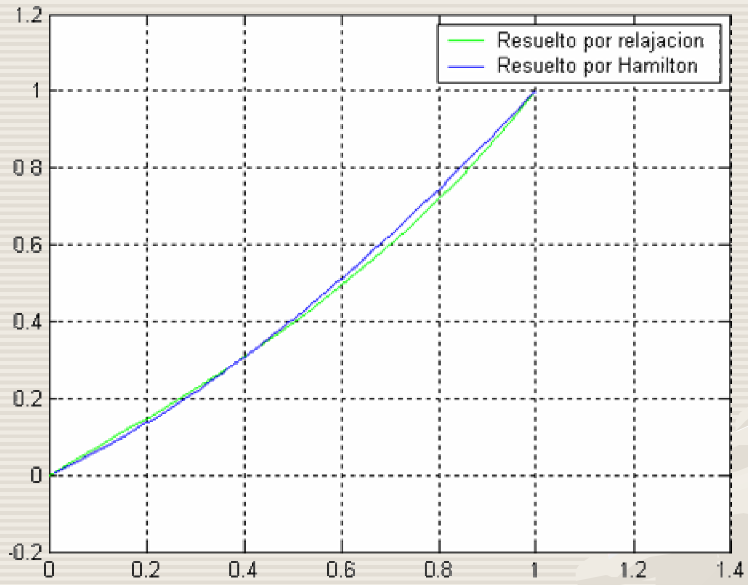
$$Min \int_0^t |m_1|dt$$

$$s.a. \quad \dot{x} = m_2 - m_1 x + x$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad x(1) = L_2$$

EJEMPLO 4 – COMPARACIÓN DE RESULTADOS



# puntos	μ	σ^2
20 puntos	0.0465	0.0021
30 puntos	0.0245	0.0023
40 puntos	0.0143	0.0011

CONCLUSIONES

- El problema transformado es convexo en el control, por lo cual posee solución (Cesari, 1983).
- El problema transformado tiene estructura convexa luego se puede abordar con un modelo discreto mediante programación matemática.
- La señal de control se obtiene a partir del momento central en la serie de momentos que logran la convexificación del control.